JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do četvrtka, 28. studenog u 23 sata na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 29. studenog u 11:30 u prostoriji A201.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Definirajte pojam σ-algebre na nepraznom skupu Ω.

(b) (2 boda) Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, te $A, B, C \in \mathcal{F}$. Koristeći samo definiciju pod (a), dokažite da je $(A \cup B) \setminus C \in \mathcal{F}$.

(c) (3 boda) Neka je $\mathcal{A}$ algebra skupova na nepraznom skupu Ω sa svojstvom da je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ za sve nizove po parovima disjunktnih skupova $A_n \in \mathcal{A}$. Je li tada $\mathcal{A}$ σ-algebra? Svoj odgovor detaljno obrazložite.

(d) (i) (2 boda) Nađite najmanju σ-algebru na skupu $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ koja sadrži skupove $\{1\}$ i $\{3\}$.

(ii) (1 bod) Nađite najmanju σ-algebru na skupu $\mathbb{N}$ koja sadrži sve jednočlane skupove $\{2k - 1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Precizno definirajte pojam vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (3 boda) Precizno iskažite i dokažite svojstvo σ-subaditivnosti vjerojatnosti.

(c) (2 boda) Izvlačimo kuglicu iz košare. Neke kuglice u košari su crvene boje. Također, neke su numerirane. Vjerojatnost da izvučemo crvenu kuglicu koja nije numerirana je 0.4, dok je vjerojatnost da je izvučena kuglica numerirana jednaka 0.3. Izračunajte vjerojatnost da izvučena kuglica neće biti niti crvene boje niti numerirana.

(d) (3 boda) Neka je $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ konačno aditivna na $\mathcal{F}$, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki konačan niz $(A_j)_{1\le j\le n}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$.
Precizno dokažite ili opovrgnite tvrdnju:
Ako je $\mathbb{P}$ neprekidna na neopadajuće nizove događaja, onda je $\mathbb{P}$ σ-aditivna na $\mathcal{F}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi $\mathbb{P}(A) \in \langle 0, 1\rangle$ i $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B|A)$. Dokažite da vrijedi $\mathbb{P}(B^c) < \mathbb{P}(B^c|A^c)$.

(b) (2 boda) Precizno iskažite formulu potpune vjerojatnosti.

(c) (3 boda) Bacamo simetričnu kocku. Ako padne broj strogo manji od 3 onda na slučajan način biramo knjigu s police broj 1, u suprotnom biramo knjigu s police broj 2. Na polici broj 1 se nalazi 5 knjiga hrvatskih autora i 3 knjige stranih autora, a na polici broj 2 se nalazi 6 knjiga hrvatskih i 2 knjige stranih autora. Ako znamo da je izabrana knjiga hrvatkog autora, izračunajte vjerojatnost da je knjiga birana s police broj 2.

(d) (3 boda) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$, izračunajte $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Koje pretpostavke mora zadovoljavati vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ da bi se radilo o Laplaceovom modelu vjerojatnosti? Kako u tom slučaju računamo $\mathbb{P}(A)$, za $A \in \mathcal{F}$?

(b) Standardan špil se sastoji od 13 jačina po 4 karte, odnosno ukupno 52 karte. Na početku igre iz špila nasumično izvučemo 5 karata. Kaže se da smo dobili poker ukoliko su 4 od tih 5 karata iste jačine.

(i) (2 boda) Kolika je vjerojatnost da smo izvukli poker?

(ii) (5 bodova) Neka je svih 5 izvučenih karata različite jačine. Potom biramo želimo li odbaciti svih 5 karata i od preostalih karata u špilu izvući novih 5 ili želimo sačuvati 1 kartu, odbaciti ih 4 i od preostalih karata u špilu izvući novih 4. Što trebamo izabrati kako bismo imali veću vjerojatnost da nakon drugog izvlačenja dobijemo poker?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Definirajte slučajnu varijablu X na tom vjerojatnosnom prostoru.

(b) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla. Definirajte varijancu slučajne varijable X. Ako varijanca diskretne slučajne varijable X postoji, pokažite da je tada

$$\mathrm{Var}\,(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}\,(X) \text{ za sve } a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) (3 boda) Neka je X nenegativna diskretna slučajna varijabla za koju je

$$\mathbb{P}(X = \frac{m\pi}{4}) = \begin{cases} 8 \cdot 3^{-m-1}, & m \text{ neparan} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite distribuciju slučajne varijable $\sin(2X)$.

(d) (3 boda) Igrač igra igru u kojoj se iz skupa $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ izvlači 5 brojeva (koji se po završetku kruga vraćaju u skup), a igrač je pobjednik tog kruga ukoliko je zbroj izvučenih brojeva paran. Odredi očekivani broj krugova do prve pobjede igrača.