

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

- Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i kalkulator.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do četvrtka, 06. veljače u 22 sata na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 07. veljače u 11:30 u prostoriji 002.

Zadatak 1.

- (a) Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.
- (a1) (3 boda) Pokažite da vrijedi $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$.
- (a2) (2 boda) Iskažite i dokažite Cauchy-Schwartzovu nejednakost (za diskretne slučajne varijable).
- (a3) (1 bod) Definirajte kovarijancu od X i Y .
- (b) (4 boda) Bacamo dvije simetrične kocke. Označimo s X ukupan broj jedinica, a s Y ukupan broj parnih brojeva koji su pali. Izračunajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y .

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 2.

- (a) (a1) (1 bod) Definirajte dvodimenzionalni slučajni vektor.
(a2) (1 bod) Definirajte nezavisnost diskretnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- (b) Neka je $X \sim \mathcal{B}(1000, 0.2)$ i $Y \sim \mathcal{P}(5)$ nezavisne slučajne varijable.
(b1) (1 bod) Odredite $\mathbb{E}(X|Y = 1)$.
(b2) (1 bod) Odredite $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$.
- (c) Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s funkcijom gustoće $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & (x, y) \in \{(2, 0), (0, -2)\} \\ \frac{1}{16}, & (x, y) \in \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- (c1) (3 boda) Odredite $\mathbb{E}(X|Y = 1)$.
(c2) (2 boda) Odredite marginalne funkcije gustoće.
(c3) (1 bod) Jesu li X i Y nezavisni?

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 3.

- (a) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f .
- (a1) (2 boda) Ako je $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = 1$ dokažite da je $1 \leq \mathbb{E}[X] \leq 3$.
- (a2) (1 bod) Ako je $1 \leq \mathbb{E}[X] \leq 3$ mora li vrijediti $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = 1$?
- (b) Sistolički tlak skupine ljudi od 25 do 29 godina normalno je distribuiran s očekivanjem za muškarce 131.8, a za žene 127.2 te standardnom devijacijom za muškarce 13.4, a za žene 11.4. Smatra se da osoba ima visok sistolički tlak ukoliko on iznosi preko 140.
- (b1) (2 bod) Koja je vjerojatnost da nasumično odabrani muškarac starosti između 25 i 29 godina ima visok sistolički tlak?
- (b2) (3 bod) Pretpostavimo da je u populaciji jednako muškaraca i žena. Ukoliko osoba starosti između 25 i 29 godina ima visok sistolički tlak odredite vjerojatnost da se radi o ženi.
- (c) (2 boda) Mariji kolokvij počinje za 30 minuta u trenutku kada ju zove baka. Trajanje telefonskog razgovora Marije i njezine bake eksponencijalno je distribuirano s očekivanim trajanjem 15 minuta. Marija ne želi započinjati razgovor ukoliko nije barem 90% sigurna da će poziv završiti prije početka kolokvija. Treba li se Marija javiti na bakin telefonski poziv?

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 4.

- (a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u \mathbb{Z}_+ . Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X .
- (b) (2 boda) Neka je X geometrijska slučajna varijabla s vrijednostima u \mathbb{N} s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X .
- (c) (3 boda) Neka je $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u \mathbb{Z}_+ , te neka je N slučajna varijabla s vrijednostima u \mathbb{Z}_+ nezavisna od niza $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Označimo sa G_{X_1} i G_N funkcije izvodnice slučajnih varijabli X_1 i N . Definiramo $S := \sum_{j=1}^N X_j$. Dokažite da je funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable S jednaka kompoziciji $G_N \circ G_{X_1}$. Obrazložite svaki korak dokaza.
- (d) (3 boda) Bacamo simetričnu igraću kocku. Svaki put kada padne neki od brojeva $\{5, 6\}$ bacamo simetričan novčić i zabilježimo je li palo pismo ili glava. Kada prvi put pri bacanju kocke padne neki od brojeva $\{1, 2, 3, 4\}$ bacimo novčić još jednom i prestajemo s bacanjem. Neka je S ukupan broj pisama koji su pali pri bacanju novčića. Odredite G_S i izračunajte $\mathbb{E}(S)$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

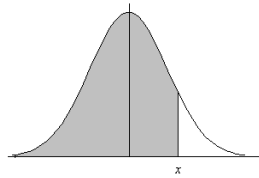
Zadatak 5.

- (a) (3 boda) Precizno iskažite jaki zakon velikih brojeva.
- (b) (3 boda) Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa zajedničkim očekivanjem $\mu = 0$. Pretpostavimo nadalje da je $K := \mathbb{E}(X_1^4) < \infty$. Dokažite da je

$$\mathbb{E}[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^4] \leq 3Kn^2.$$

- (c) Neka je $(X_n)_{n \geq 1}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda = 1$, $X_n \sim \text{Exp}(1)$. Za $n \geq 1$ stavimo $S_n := X_1 + \dots + X_n$.
- (c1) (2 boda) Ispitajte konvergenciju po distribuciji niza $\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$. Ako niz konvergira po distribuciji, odredite graničnu distribuciju.
- (c2) (2 boda) Ispitajte konvergenciju po distribuciji niza $\left(\frac{S_n - n}{n}\right)_{n \geq 1}$. Ako niz konvergira po distribuciji, odredite graničnu distribuciju.

Tablica vrijednosti funkcije distribucije jedinične normalne razdiobe



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Npr. $\Phi(1.64) = 0.9495$.

Ako je $x \leq 0$, onda koristimo jednakost $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.