VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 1.

(a) Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.

(a1) (3 boda) Pokažite da vrijedi $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$.

(a2) (2 boda) Iskažite i dokažite Cauchy-Schwartzovu nejednakost (za diskretne slučajne varijable).

(a3) (1 bod) Definirajte kovarijancu od X i Y.

(b) (4 boda) Bacamo dvije simetrične kocke. Označimo s X ukupan broj jedinica, a s Y ukupan broj parnih brojeva koji su pali. Izračunajte koeficijent korelacije slučajnih varijabli X i Y.

Rješenje.

(a1) Vidi Lemu 5.14.a) s predavanja.

(a2) Vidi Lemu 5.14.b) s predavanja.

(a3) Vidi Definiciju 5.15 s predavanja.

(b) Tablica razdiobe slučajnog vektora (X, Y) je:

$X \backslash Y$	0	1	2	f_X
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
f_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

odakle odmah iščitavamo marginalne distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{36} & \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Kako je $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{7}{18}$, $\mathbb{E}(Y) = 1$, $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{3}{2}$, to vrijedi

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{5}{18}, \mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{1}{2}.$$

Također $\mathbb{E}(XY) = \sum_{x,y} xyf_{X,Y}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, pa je $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{6}$. Konačno, traženi koeficijent korelacije iznosi:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{-\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{18}}\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -0.4472.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 2.

(a) (a1) (1 bod) Definirajte dvodimenzionalni slučajni vektor.

(a2) (1 bod) Definirajte nezavisnost diskretnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b) Neka je $X \sim \mathcal{B}(1000, 0.2)$ i $Y \sim \mathcal{P}(5)$ nezavisne slučajne varijable.

(b1) (1 bod) Odredite $\mathbb{E}\,(X|Y=1)$.

(b2) (1 bod) Odredite $\mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,(Y|X))$.

(c) Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s funkcijom gustoće $f(x, y)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & (x,y) \in \{(2,0),(0,-2)\} \\ \frac{1}{16}, & (x,y) \in \{(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(c1) (3 boda) Odredite $\mathbb{E}\,(X|Y=1)$.

(c2) (2 boda) Odredite marginalne funkcije gustoće.

(c3) (1 bod) Jesu li X i Y nezavisni?

Rješenje.

(a) (a1) Neka su X i Y (diskretne) slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Uređeni par (X, Y) nazivamo (diskretnim) slučajnim vektorom.

(a2) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da su X i Y nezavisne ukoliko je

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R},$$

odnosno ako za funkciju gustoće slučajnog vektora $f_{(X,Y)}$ vrijedi

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$$

gdje su f_X i f_Y funkcije gustoća slučajnih varijabli X i Y, redom.

(b) (b1) Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli vrijedi:

$$\mathbb{E}\,(X|Y=1) = \mathbb{E}\,X = n \cdot p = 1000 \cdot 0.2 = 200.$$

(b2) Prema teoremu s predavanja je:

$$\mathbb{E}\,(\mathbb{E}\,(Y|X)) = \mathbb{E}\,Y = \lambda = 5.$$

(c) (c1) Prvo primijetimo kako je

$$\mathbb{P}(X=k, Y=1) = 0, |k| \neq 1$$
$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{16}$$
$$\mathbb{P}(X=-1, Y=1) = \frac{1}{16}.$$

Stoga je

$$\mathbb{E}\left(X|Y=1\right) = 1 \cdot \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} + (-1) \cdot \frac{\mathbb{P}(X=-1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\frac{1}{16}}{\mathbb{P}(Y=1)} - \frac{\frac{1}{16}}{\mathbb{P}(Y=1)} = 0.$$

(c2) Vidimo da je

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{3}{8} = f_X(2) = f_X(0)$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=-1) = \frac{1}{8} = f_X(1) = f_X(-1)$$
$$\mathbb{P}(Y=-2) = \mathbb{P}(Y=0) = \frac{3}{8} = f_Y(-2) = f_Y(0)$$
$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=-1, Y=1) = \frac{1}{8} = f_Y(1) = f_Y(-1)$$

pa je

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & x \in \{0, 2\} \\ \frac{1}{8}, & x \in \{-1, 1\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

i

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}, & y \in \{-2, 0\} \\ \frac{1}{8}, & y \in \{-1, 1\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(c3) Možemo vidjeti kako je

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{1}{16},$$

a s druge strane je

$$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$$

što znači da slučajne varijable X i Y nisu nezavisne.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 3.

(a) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f.

(a1) (2 boda) Ako je $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = 1$ dokažite da je $1 \leq \mathbb{E}[X] \leq 3$.

(a2) (1 bod) Ako je $1 \leq \mathbb{E}[X] \leq 3$ mora li vrijediti $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = 1$?

(b) Sistolički tlak skupine ljudi od 25 do 29 godina normalno je distribuiran s očekivanjem za muškarce 131.8, a za žene 127.2 te standardnom devijacijom za muškarce 13.4, a za žene 11.4. Smatra se da osoba ima visok sistolički tlak ukoliko on iznosi preko 140.

(b1) (2 bod) Koja je vjerojatnost da nasumično odabrani muškarac starosti između 25 i 29 godina ima visok sistolički tlak?

(b2) (3 bod) Pretpostavimo da je u populaciji jednako muškaraca i žena. Ukoliko osoba starosti između 25 i 29 godina ima visok sistolički tlak odredite vjerojatnost da se radi o ženi.

(c) (2 boda) Mariji kolokvij počinje za 30 minuta u trenutku kada ju zove baka. Trajanje telefonskog razgovora Marije i njezine bake eksponencijalno je distribuirano s očekivanim trajanjem 15 minuta. Marija ne želi započinjati razgovor ukoliko nije barem 90% sigurna da će poziv završiti prije početka kolokvija. Treba li se Marija javiti na bakin telefonski poziv?

Rješenje.

(a) (a1) Imamo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \leq \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} 3f(x)dx = 3.$$

(a2) Ne, npr. neka je $X \sim U(0,2)$ tada s predavanja znamo da je $\mathbb{E}[X] = 1$, a $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2}$.

(b) (b1) Neka je X slučajna varijabla koja označava sistolički tlak muškarca starosti između 25 i 29 godina. Po zadatku znamo da je $X \sim N(131.8, 13.4)$ iz čega zaključujemo da je $\frac{X-131.8}{13.4} \sim N(0,1)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 140) =& \mathbb{P}\left(\frac{X-131.8}{13.4} > \frac{140-131.8}{13.4}\right) \approx \mathbb{P}\left(\frac{X-131.8}{13.4} > 0.61\right) = \\ =& 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-131.8}{13.4} \leq 0.61\right) = 1 - \Phi(0.61) = 1 - 0.7291 = 0.2709.\end{aligned}$$

(b2) Neka je $H = \{\text{Odabrana osoba je žensko}\}$ i $A = \{\text{Odabrana osoba ima visok tlak}\}$. Po tekstu zadatka znamo da je $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H^c) = \frac{1}{2}$. Primjenom Bayesove formule dobivamo da je

$$\mathbb{P}(H \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(A \mid H)}{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(A \mid H) + \mathbb{P}(H^c)\mathbb{P}(A \mid H^c)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid H)}{\mathbb{P}(A \mid H) + \mathbb{P}(A \mid H^c)}.$$

U (b1) dijelu zadatka smo pokazali da je $\mathbb{P}(A \mid H^c) = 0.2709$, slično uz $Y \sim N(127.2, 11.4)$ računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 140) =& \mathbb{P}\left(\frac{Y-127.2}{11.4} > \frac{140-127.2}{11.4}\right) \approx \mathbb{P}\left(\frac{Y-127.2}{11.4} > 1.12\right) = \\ =& 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y-131.8}{13.4} \leq 1.12\right) = 1 - \Phi(1.12) = 1 - 0.8686 = 0.1314\end{aligned}$$

odnosno vrijedi $\mathbb{P}(A \mid H) = 0.1314$ iz čega slijedi da je $\mathbb{P}(H \mid A) = 0.3266$.

(c) Neka je X slučajna varijabla koja označava duljinu trajanja poziva. Iz zadatka znamo da je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ te da je $\mathbb{E}[X] = 15$. Kako s predavanja za očekivanje eksponencijalne slučajne varijable znamo da je $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ zaključujemo da je $\lambda = \frac{1}{15}$. Želimo odrediti $\mathbb{P}(X \leq 30) = F(30)$, gdje je F funkcija distribucije slučajne varijable X. Kako je funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

dobivamo $\mathbb{P}(X \leq 30) = 1 - e^{-\frac{30}{15}} \approx 0.86 < 0.90$. Marija se ne treba javiti na bakin telefonski poziv, ali bilo bi lijepo da je nazove poslije kolokvija :)

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) (2 boda) Neka je X geometrijska slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}$ s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X.

(c) (3 boda) Neka je $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u Z_+, te neka je N slučajna varijabla s vrijednostima u Z_+ nezavisna od niza $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Označimo sa G_{X_1} i G_N funkcije izvodnice slučajnih varijabli X_1 i N. Definiramo $S := \sum_{j=1}^{N} X_j$. Dokažite da je funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable S jednaka kompoziciji $G_N \circ G_{X_1}$. Obrazložite svaki korak dokaza.

(d) (3 boda) Bacamo simetričnu igraću kocku. Svaki put kada padne neki od brojeva $\{5, 6\}$ bacamo simetričan novčić i zabilježimo je li palo pismo ili glava. Kada prvi put pri bacanju kocke padne neki od brojeva $\{1, 2, 3, 4\}$ bacimo novčić još jednom i prestajemo s bacanjem. Neka je S ukupan broj pisama koji su pali pri bacanju novčića. Odredite G_S i izračunajte $\mathbb{E}(S)$.

Rješenje.

(a) Vidi Definiciju 7.1 s predavanja.

(b) Vidi Primjer 7.4.a) s predavanja.

(c) Vidi Poglavlje 7.2.1 s predavanja.

(d) Neka je

$$N := \text{ broj bacanja kocke.}$$

Kako je vjerojatnost da će na kocki pasti neki od brojeva $\{1, 2, 3, 4\}$ jednaka $\frac{2}{3}$, to je onda $N \sim G(\frac{2}{3})$. Dakle, $G_N(s) = \frac{2s}{3-s}$, za $|s| < 3$.
Nadalje, neka su $X_j, j \geq 1$ Bernoullijeve slučajne koje imaju vrijednost 1 ako se u $n-$tom bacanju novčića pojavilo pismo. Imamo $G_{X_j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s, s \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$.

Tada je ukupan broj pisama koji su pali jednak

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j,$$

pa vrijedi

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s)) = \frac{2 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s)}{3 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s)} = \frac{2 + 2s}{5 - s}, |s| \leq 1.$$

Konačno $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1) = G_N'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2020.

Zadatak 5.

(a) (3 boda) Precizno iskažite jaki zakon velikih brojeva.

(b) (3 boda) Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sa zajedničkim očekivanjem $\mu = 0$. Pretpostavimo nadalje da je $K := \mathbb{E}\left(X_1^4\right) < \infty$. Dokažite da je

$$\mathbb{E}\left[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^4\right] \leq 3Kn^2 \,.$$

(c) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda = 1$, $X_n \sim \text{Exp}(1)$. Za $n \geq 1$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

(c1) (2 boda) Ispitajte konvergenciju po distribuciji niza $\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$. Ako niz konvergira po distribuciji, odredite graničnu distribuciju.

(c2) (2 boda) Ispitajte konvergenciju po distribuciji niza $\left(\frac{S_n - n}{n}\right)_{n\geq 1}$. Ako niz konvergira po distribuciji, odredite graničnu distribuciju.

Rješenje.

(a) Vidi Teorem 8.10.

(b) Vidi dokaz Teorema 8.10 gdje je uz gornje pretpostavke pokazano da vrijedi $\mathbb{E}\left[(X_1+X_2+\cdots+X_n)^4\right] \leq nK + 3n(n-1)K$. Budući da je $nK + 3n(n-1)K \leq 3Kn^2$, tvrdnja vrijedi.

(c) Prvo uočimo da je $\mu = \mathbb{E}\left(X_1\right) = 1$ i $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) = 1$. Zato je $\mathbb{E}\left(S_n\right) = n$, te $\text{Var}(S_n) = \sigma^2 n = n$.

(c1) Vrijedi

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},$$

pa iz centralnog graničnog teorema slijedi da gornji niz po distribuciji konvergira ka standardnoj normalnoj distribuciji $N(0,1)$.

(c2) Vrijedi

$$\frac{S_n - n}{n} = \frac{S_n. - n\mu}{n},$$

pa po jakom zakonu velikh brojeva slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - n}{n} = 0$ g.s. Također, po slabom zakonu velikih brojeva vrijedi da taj niz konvergira prema 0 po vjerojatnsoti. Sada iz Teorema 8.12 dobivamo da niz $\left(\frac{S_n - n}{n}\right)_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli $X \equiv 0$ (identički jednaka nuli).