VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 9. veljače 2022.

Zadatak 1.

(a) Neka su X_1, X_2, X_3 diskretne slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te koje poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

(a1) (1 bod) Definirajte nezavisnost slučajnih varijabli X_1, X_2, X_3.

(a2) (2 boda) Ako su X_1, X_2, X_3 nezavisne, pokažite da za sve $B_1, B_2, B_3 \subseteq \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, X_3 \in B_3) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2)\mathbb{P}(X_3 \in B_3)\,.$$

(b) (3 boda) Ako su X_1, X_2, X_3 nezavisne slučajne varijable s radiobom $X_i \sim G(p_i)$, $i = 1, 2, 3$ pri čemu je $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{4}$, odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. Precizno objasnite na kojem mjestu i kako koristite nezavisnost.

(c) (4 boda) Bacamo tri simetrična novčića te označimo s X_1 ukupan broj pisama na 1. i 2. novčiću, a s X_2 ukupan broj pisama na 2. i 3. novčiću. Odredite distribuciju slučajnog vektora (X_1, X_2) (obrazložite kako ste došli do nje) i provjerite jesu li X_1 i X_2 nezavisne.

Rješenje.

(a) Vidi paragraf ispod Definicije 5.5, te Teorem 5.6(a) u skripti s predavanja.

(b) Ovo je Primjer 5.8 iz skripte s predavanja. Za sve $n \in \mathbb{N}$, uz $B_1 = B_2 = B_3 = \{n, n+1, \dots\}$, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geq n) &= \mathbb{P}(X_1 \geq n, X_2 \geq n, X_3 \geq n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, X_3 \in B_3)\\ &= [\text{koristimo } (a2)] = \mathbb{P}(X_1 \in B_1)\mathbb{P}(X_2 \in B_2)\mathbb{P}(X_3 \in B_3)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \geq n)\mathbb{P}(X_2 \geq n)\mathbb{P}(X_3 \geq n) = (\tfrac{1}{2})^{n-1}(\tfrac{2}{3})^{n-1}(\tfrac{3}{4})^{n-1} = (\tfrac{1}{4})^{n-1}\,.\end{aligned}$$

Specijalno, za sve $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geq n) - \mathbb{P}(Y \geq n+1) = (\tfrac{1}{4})^{n-1} - (\tfrac{1}{4})^{n} = (\tfrac{1}{4})^{n-1}\tfrac{3}{4}\,,$$

tj. $Y \sim G(\frac{3}{4})$.

(c) Tablica distribucije je

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Na primjer,

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbb{P}(\{\text{na svim novčićima pala glava}\}) = \mathbb{P}(\{GGG\}) = \tfrac{1}{2^3} = \tfrac{1}{8}$$

ili

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(\{PGP, GPG\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\,.$$

Slučajne varijable X_1 i X_2 nisu nezavisne – to slijedi npr. iz

$$\mathbb{P}(X_1 = 2, X_2 = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 0) > 0\,.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 9. veljače 2022.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Definirajte pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b) (3 boda) Neka je X slučajna varijabla uniformno distribuirana na $[0,1]$, $X \sim U(0,1)$. Pokažite da je $Y := \sin(\pi X)$ također apsolutno neprekidna te joj nađite funkciju gustoće.

(c) (2 boda) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla te $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ funkcija. Detaljno dokažite da za svaki $c > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(h(X) \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}\left[h(X)\right]}{c}.$$

(d) (3 boda) Neka je X slučajno odabrana točka u segmentu $[-1,1]$ takva da za $-1 < a < b < 1$ vrijedi

$$\mathbb{P}\big(X \in (a,b)\big) = \int_a^b (1 - |x|)\, dx.$$

Segment $[-1,1]$ podijeljen je točkom X na dva dijela. Nađite očekivanu duljinu dijela segmenta koji sadrži točku $c = 0$.

Rješenje.

(a) Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je apsolutno neprekidna ako postoji funkcija $f = f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\, dt\,.$$

(b) Budući da je $0 \leq X \leq 1$, to je $0 \leq \pi X \leq \pi$, pa je $0 \leq Y = \sin(\pi X) \leq 1$. Neka je $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ funkcija distribucije slučajne varijable Y. Za $x < 0$ je $F_Y(x) = 0$, a za $x \geq 1$ je $F_Y(x) = 1$. Neka je $x \in [0,1]$. Tada je

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}(\sin(\pi X) \leq x) = \mathbb{P}\big(\{0 \leq \pi X \leq \arcsin x\} \cup \{\pi - \arcsin x \leq \pi X \leq \pi\}\big) \\
&= \mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{1}{\pi}\arcsin x) + \mathbb{P}(1 - \frac{1}{\pi}\arcsin x \leq X \leq 1) \\
&= \frac{1}{\pi}\arcsin x + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\pi}\arcsin x\right)\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin x.
\end{aligned}$$

Budući da je

$$\frac{d}{dt}\arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

slijedi

$$F_Y(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x = \int_0^x \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Definiramo

$$f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $F_Y(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ što znači da je Y apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Iz te formule vidimo da je f funkcija gustoće od Y.

(c) Neka je f funkcija gustoće slučajne varijable X. Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h(X)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx \geq \int_{\{x:\,h(x)\geq c\}} h(x)f(x)\,dx \geq \int_{\{x:\,h(x)\geq c\}} cf(x)\,dx \\ &= c\int_{\{x:\,h(x)\geq c\}} f(x)\,dx = c\mathbb{P}(h(X)\geq c).\end{aligned}$$

(d) Uočite da ako je $X > 0$, tada je $[-1, X]$ segment koji sadrži točku $c = 0$, a ako je $X < 0$, tada je $[X, 1]$ segment koji sadrži $c = 0$. Duljina segmenta koji sadrži točku $c = 0$ je slučajna varijabla koju ćemo označiti s D. Tada je $D = X + 1$ za $X > 0$ i $D = 1 - X$ za $X < 0$. Slijedi

$$\mathbb{E}\,D = \int_{-1}^{0} (1-x)(x+1)\,dx + \int_{0}^{1} (x+1)(1-x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \frac{4}{3}.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 9. veljače 2022.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Precizno definirajte uvjetno očekivanje diskretne slučajne varijable X uz dano $Y = a$, gdje je Y također diskretna slučajna varijabla.

(b) (2 boda) Neka su $X \sim \mathrm{Bern}(p_1)$ i $Y \sim \mathrm{Bern}(p_2)$ nezavisne slučajne varijable, $p_1, p_2 \in (0, 1)$. Odredite $\mathbb{E}[X + Y | X - Y = 0]$.

(c) (3 boda) Neka je (X, Y) diskretni slučajni vektor takav da postoje očekivanja od X i od $\mathbb{E}[X|Y]$. Dokažite i detaljno obrazložite:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}\,X.$$

(d) (3 boda) Predavanja iz vjerojatnosti se često razlikuju po svojem trajanju. Označimo s X trajanje predavanja. Tijekom predavanja studenti postave pitanja s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$. Neka je Y slučajna varijabla takva da je $Y = 1$ ako je bilo pitanja tijekom predavanja, a $Y = 0$ ako nije. Poznato je da je X uvjetno na događaj da nije bilo pitanja uniformno distribuirana slučajna varijabla na skupu $\{75, 80\}$, dok je X uvjetno na događaj da je bilo pitanja uniformno distribuirana na skupu $\{80, 85, 90\}$. Odredite $\mathbb{E}[X|Y]$ i $\mathbb{E}\,X$.

Rješenje.

(a) Uvjetno očekivanje od X uz dano $Y = a$, ako je $\mathbb{P}(Y = a) > 0$ definira se kao

$$\mathbb{E}[X|Y = a] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|a)$$

ako $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f_{X|Y}(x|a) < \infty$, pri čemu je $f_{X|Y}(x|a)$ uvjetna gustoća od X uz dano $Y = a$.

(b) S obzirom na aditivnost (uvjetnog) matematičkog očekivanja, možemo pisati

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X + Y | X - Y = 0] &= \mathbb{E}[X | X - Y = 0] + \mathbb{E}[Y | X - Y = 0] = \\
&= \sum_{x\in\mathbb{R}} x\,\mathbb{P}(X = x | X - Y = 0) + \sum_{y\in\mathbb{R}} y\,\mathbb{P}(Y = y | X - Y = 0) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = 1, X - Y = 0)}{\mathbb{P}(X - Y = 0)} + \frac{\mathbb{P}(Y = 1, X - Y = 0)}{\mathbb{P}(X - Y = 0)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 1, X = 1)}{\mathbb{P}(X = 1, X = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0)} = \\
&= \frac{2p_1p_2}{p_1p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2)}
\end{aligned}$$

gdje smo koristili nezavisnost slučajnih varijabli X i Y.

(c) Skripta s predavanja, Teorem 5.34.

(d) Znamo da je $Y \sim \text{Bern}(\frac{2}{3})$. Odredimo sliku od $\mathbb{E}[X|Y]$ koristeći informacije o uvjetnoj distribuciji od X uz dano $\{Y = 0\}$, odnosno $\{Y = 1\}$:

$$\mathbb{E}[X|Y = 0] = \frac{1}{2} \cdot 75 + \frac{1}{2} \cdot 80 = 77.5$$
$$\mathbb{E}[X|Y = 1] = \frac{1}{3} \cdot 80 + \frac{1}{3} \cdot 85 + \frac{1}{3} \cdot 90 = 85.$$

Odredimo i pripadne vjerojatnosti:

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y] = 77.5) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y] = 85) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{3}.$$

Vrijedi:

$$\mathbb{E}[X|Y] \sim \begin{pmatrix} 77.5 & 85 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Prema (c) dijelu je $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}X$ pa je prema tome

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{3} \cdot 77.5 + \frac{2}{3} \cdot 85 = 82.5.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 9. veljače 2022.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Precizno defnirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) (2 boda) Neka je $X \sim B(n,p)$, $p \in \langle 0,1 \rangle$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti od $2022X+3$.

(c) (3 boda) Neka je $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$, te neka je N slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ nezavisna od niza $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Definiramo $S := \sum_{j=1}^N X_j$. Označimo sa G_{X_1}, G_N i G_S funkcije izvodnice vjerojatnosti slučajnih varijabli X_1, N i S. Dokažite da je $G_S = G_N \circ G_{X_1}$. Obrazložite svaki korak dokaza.

(d) (3 boda) U jednoj tvornici vjerojatnost da se proizvede neispravan proizvod je $\frac{1}{100}$. Tvornica proizvede 150 proizvoda. Ako je proizvedeni proizvod ispravan, proizvod ide na skladište, a ako je neispravan, onda se odlaže na otpad. Nakon toga se proizvod iz skladišta s vjerojatnošću $\frac{1}{5}$ šalje u trgovinu. Označimo s S ukupan broj proizvoda koji su došli iz skladišta u trgovinu. Odredite G_S i $\mathbb{E}(S)$.

Rješenje.

(a) Skripta s predavanja, Definicija 7.1.

(b) Vrijedi

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ps)^k q^{n-k} = (ps+q)^n,$$

za sve $s \in \mathbb{R}$. Izračunajmo sada funkciju izvodnicu vjerojatnosti od $2022X+3$:

$$G_{2022X+3}(s) = \mathbb{E}[s^{2022X+3}] = s^3\mathbb{E}[(s^{2022})^X] = s^3 G_X(s^{2022}) = s^3(ps^{2022}+q)^n, s \in \mathbb{R}.$$

(c) Vidi Poglavlje 7.2.1 s predavanja.

(d) Označimo s N ukupan broj proizvedenih ispravnih proizvoda u tvornici (odnosno onih koji završe na skladištu). Tada $N \sim B(150, \frac{99}{100})$, pa je prema (b) dijelu zadatka $G_N(s) = (\frac{99}{100}s + \frac{1}{100})^{150}$. Označimo s X_j Bernoullijevu slučajnu varijablu koja poprima vrijednost 1 ako je proizvod j otišao iz skladišta u trgovinu. Tada je $G_{X_j}(s) = \frac{1}{5}s + \frac{4}{5}, s \in \mathbb{R}$ i vrijedi $S = \sum_{j=1}^N X_j$. Vrijedi

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s)) = \left(\frac{99}{100}\left(\frac{1}{5}s + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{100}\right)^{150} = \left(\frac{99}{500}s + \frac{401}{500}\right)^{150}, s \in \mathbb{R}.$$

Također, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1) = 150 \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{297}{10}$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 9. veljače 2022.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Precizno definirajte pojam konvergencije po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli.

(b) (3 boda) Bacamo simetrični novčić, pri čemu su bacanja nezavisna. Za svaki prirodan broj n, neka je S_n broj bacanja potrebnih da se pismo pojavi n puta. Dokažite da niz $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ konvergira gotovo sigurno i odredite graničnu slučajnu varijablu.

(c) (2 boda) Precizno iskažite centralni granični teorem.

(d) (3 boda) Simetričnu kocku bacamo 1500 puta, pri čemu su bacanja nezavisna. Koristeći centralni granični teorem, odredite približnu vjerojatnost događaja da je zbroj dobivenih brojeva veći od 5300.

Rješenje.

(a) Neka su $(X_n)_{n\geq 1}$ i X slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada kažemo da niz $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira po vjerojatnosti prema X ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

(b) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli definiran s $X_n = S_n - S_{n-1}$ za $n \geq 1$, gdje definiramo $S_0 = 0$. Dakle, X_n je broj bacanja između n-te i $(n-1)$-ve pojave pisma te vrijedi $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Za proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, događaj $\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$ odgovara jedinstvenom ishodu prvih $x_1 + \ldots + x_n$ bacanja, stoga je njegova vjerojatnost jednaka $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+\ldots+x_n}$. Odavde posebno slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = x_n) &= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\
&= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+\ldots+x_{n-1}+x_n} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathbb{N}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_i} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} \prod_{i=1}^{n-1} \sum_{x_i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_i} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n}
\end{aligned}$$

te analogno $\mathbb{P}(X_i = x_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_i}$ za $i = 1, \ldots, n-1$. Dakle, svaka od slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_n$ ima geometrijsku distribuciju s parametrom $\frac{1}{2}$. Štoviše, one su nezavisne jer vrijedi

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+\ldots+x_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Budući da je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem 2, iz jakog zakona velikih brojeva slijedi da niz $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ konvergira gotovo sigurno prema konstantnoj slučajnoj varijabli 2.

(c) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i varijancom σ^2. Za $n \geq 1$ definirajmo $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Drugim riječima, niz $(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji prema $N(0,1)$.

(d) Za $i = 1, \ldots, 1500$, neka je X_i broj dobiven u i-tom bacanju. Tada su $X_1, \ldots, X_{1500}$ nezavisne slučajne varijable s uniformnom distribucijom na skupu $\{1,2,3,4,5,6\}$. Za sve $i = 1, \ldots, 1500$ imamo

$$\mathbb{E}(X_i) = \sum_{j=1}^{6} j\mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot j = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\mathbb{E}(X_i^2) = \sum_{j=1}^{6} j^2\mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot j^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = \frac{91}{6},$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Označimo li sa $S = X_1 + \ldots + X_{1500}$ zbroj dobivenih brojeva, prema centralnom graničnom teoremu imamo

$$\mathbb{P}(S \leq 5300) = \mathbb{P}\left(\frac{S - 1500 \cdot \frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}} \cdot \sqrt{1500}} \leq \frac{5300 - 1500 \cdot \frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}} \cdot \sqrt{1500}}\right) \approx \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right) \approx 0.7764.$$

Dakle, vjerojatnost događaja da je zbroj dobivenih brojeva veći od 5300 iznosi

$$\mathbb{P}(S > 5300) = 1 - \mathbb{P}(S \leq 5300) \approx 1 - 0.7764 = 0.2236.$$