VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 1. (*13 bodova*)

(a) (*3 boda*) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Definirajte vjerojatnost na tom prostoru.

(b) (*3 boda*) Neka su A, B i C događaji. Napišite i dokažite Formulu uključivanja-isključivanja za

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C).$$

(c) (*3 boda*) Neka su A i B događaji takvi da je $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ i $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Pokažite da je $\frac{1}{6} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$.

(d) (*4 boda*) U zdjeli je 20 višanja od kojih je 15 bez koštice, a 5 s košticom. Vesna slučajno odabere 4 cijele višnje i pojede ih bez da kaže jesu li ili nisu imale koštice. Ante nasumično odabere jednu od preostalih višanja.

(d1) Koja je vjerojatnost da Antina višnja ima košticu?

(d2) Ako Antina višnja ima košticu, koja je vjerojatnost da je Vesna pojela bar jednu košticu?

Rješenje.

(a) (*3 boda*) **Vjerojatnost** na $(\Omega, \mathcal{F})$ je svaka funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri svojstva:

(A1) (*nenegativnost*) Za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;

(A2) (*normiranost*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(A3) (σ-*aditivnost*) ako su $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ u parovima disjunktni (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$), vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

(b) (*3 boda*)

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Dokaz ili rastavom na po parovima disjunktne događaje ili preko indikatora i očekivanja.

(c) (*3 boda*)

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = \frac{1}{2}.$$

Alternativno, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) \geq 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{6}$.

(d1) (*2 boda*) Ako smo gledamo koju od 20 višanja je izvukao Ante, zbog simetrije svaka od 20 višanja ima jednaku vjerojatnost da bude izvučena. Dakle, nalazimo se u Laplacevom modelu te je tražena vjerojatnost jednaka $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

(d2) (*2 boda*) Ovdje možemo razmišljati kao da bez vraćanja uzastopno izvlačimo 5 višanja iz zdjele. Ako je $B = \{\text{Antina višnja ima košticu}\}$, $A = \{\text{Vesna je pojela barem jednu košticu}\}$, tražimo

$$\mathbb{P}(A \mid B) = 1 - \mathbb{P}(A^c \mid B) = 1 - \frac{|A^c \cap B|}{|B|} = 1 - \frac{5 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 1}{5 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 1} = 1 - \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}\,,$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti iskoristili činjenicu da se nalazimo u Laplaceovom modelu.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 2. (*12 bodova*)

(a) (*2 boda*) Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$, definirajte uvjetnu vjerojatnost događaja A uz dano B (oznaka $\mathbb{P}(A \mid B)$).

(b) (*3 boda*) Bacamo dva simetrična novčića te neka je $B_i = \{i\text{-ti novčić je pokazao glavu}\}$, $i = 1, 2$ i $C = \{\text{pale su dvije glave ili dva pisma}\}$. Jesu li B_1 i C nezavisni? Jesu li B_1 i B_2 uvjetno nezavisni uz dano C?

(c) (*3 boda*) Pretpostavimo da je 4/5 dobivenih mailova *spam*. Među *spam* mailovima njih 1/10 sadrži frazu "besplatan novac", dok među mailovima koji nisu *spam* ta fraza se pojavljuje u 1/100 slučajeva. Ako ste dobili novi mail u kojem se nalazi fraza "besplatan novac", kolika je vjerojatnost da je dobiveni mail *spam*?

(d) (*4 boda*) Imamo kocku koja ima po dvije strane obojane u svaku od tri boje – plavu, crvenu i zelenu. Ako uzastopno bacamo kocku, kolika je vjerojatnost da će ona pasti na plavu stranu prije nego 2 puta zaredom padne na zelenu stranu?

Rješenje.

(b) Vrijedi $\mathbb{P}(B_1 \cap C) = \mathbb{P}(\{\text{pale dvije glave}\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(C)$ pa su B_1 i C nezavisni. S druge strane,

$$\mathbb{P}(B_2 \mid B_1 \cap C) = 1 \neq \mathbb{P}(B_2 \mid C)\,,$$

što povlači da B_1 i B_2 nisu uvjetno nezavisni uz dano C.

(c) Ako je $S = \{\text{mail je spam}\}$ i $F = \{\text{mail sadrži traženu frazu}\}$, pretpostavka je da vrijedi $\mathbb{P}(S) = 4/5$, $\mathbb{P}(F \mid S) = 1/10$ te $\mathbb{P}(F \mid S^c) = 1/100$. Koristeći Bayesovu formulu, tražena vjerojatnost je

$$\mathbb{P}(S \mid F) = \frac{\mathbb{P}(F \mid S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(F \mid S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(F \mid S^c)\mathbb{P}(S^c)} = \frac{1/10 \cdot 4/5}{1/10 \cdot 4/5 + 1/100 \cdot 1/5} = \frac{40}{41}\,.$$

(d) Neka je A traženi događaj. Ako je H_x događaj da smo u prvom bacanju dobili boju x, koristeći formulu potpune vjerojatnosti dobivamo

$$\begin{aligned} a := \mathbb{P}(A) &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(A \mid H_p) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(A \mid H_c) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(A \mid H_z) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{3}\mathbb{P}(A \mid H_z)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Kako bismo odredili $\mathbb{P}(A \mid H_z)$, dodatno uvjetujemo na rezultat drugog bacanja (preciznije, koristimo FPV za uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_{H_z}$), te dobivamo

$$\mathbb{P}(A \mid H_z) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot a + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}a\,.$$

Uvrštavajući ovo u (1) dobivamo da je $a = \frac{4}{5}$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 3. (*12 bodova*)

(a) (*3 boda*) Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako su A i B disjunktni događaji, koja je distribucija slučajne varijable $1_A + 1_B$?

(b) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b1) (*2 boda*) Precizno definirajte matematičko očekivanje slučajne varijable X.

(b2) (*3 boda*) Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: Ako je X diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, onda X ima matematičko očekivanje.

(c) (*4 boda*) Neka X označava potreban broj bacanja simetričnog novčića dok se glava ne pojavi po treći put. Odredite funkciju gustoće (tj. distribuciju) slučajne varijable X, te izračunajte $\mathbb{P}(10 \leq X < 12)$ i $\mathbb{E}[X]$.

Rješenje.

(a) Budući da je $1_A + 1_B = 1_{A\cup B}$, to je Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(b1) Pogledati skripte s predavanja.

(b2) Tvrdnja vrijedi. Pogledati Napomenu 4.35 iz skripte Sandrić, Vondraček ili Propoziciju 3.36 iz skripte Planinić.

(c) Za $n \geq 3$ događaj $\{X = n\}$ znači da se u n-tom bacanju pojavila glava treći put, odnosno, do uključivo $(n-1)$-rvog bacanja imamo točno 2 glave i $(n-1-2)$ pisma. Dakle, za $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1-2} \cdot \frac{1}{2} = (n-1)(n-2)(\frac{1}{2})^{n+1}.$$

Dakle, funkcija gustoće je $f \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ dana formulom $f(x) = (x-1)(x-2)(\frac{1}{2})^{x+1}$, za $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x \geq 3$, inače $f(x) = 0$. Sada imamo

$$\mathbb{P}(10 \leq X < 12) = \mathbb{P}(X = 10) + \mathbb{P}(X = 11) = 9 \cdot 13 \cdot (\frac{1}{2})^{11},$$

i

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)(\frac{1}{2})^{n+1} = \\ &= (\frac{1}{2})^4 \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)(\frac{1}{2})^{n-3} = \\ &= (\frac{1}{2})^4 \cdot \frac{6}{(1-\frac{1}{2})^4} = 6,\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili formulu koju dobijemo kad nađemo treću derivaciju izraza

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Napomena: X je zapravo suma tri geometrijske razdiobe s parametrom $1/2$, pa je očekivanje zbog linearnosti jednako $3 \cdot 2 = 6$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 4. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Neka je X diskretna slučajna varijabla. Precizno definirajte pojam varijance slučajne varijable X.

(b) Kolokvij iz jednog kolegija piše 120 studenata. U tu svrhu, oni trebaju biti raspoređeni u šest učionica: 001, 006, 101, 110, A001 i A002. Umorna od ispravljanja ranijih kolokvija, asistentica ih je odlučila rasporediti na sljedeći način: za svakog studenta nezavisno će baciti simetričnu kocku koja će odrediti u kojoj će učionici pisati kolokvij. Za $1 \leq i < j \leq 120$, neka $A_{i,j}$ označava događaj da su i-ti i j-ti student raspoređeni u istu učionicu.

(b1) (*3 boda*) Koja je distribucija broja studenata u pojedinoj učionici? Odredite njegovo očekivanje i varijancu.

(b2) (*5 bodova*) Odredite vjerojatnosti događaja $A_{i,j}$ te pokažite da su oni u parovima nezavisni. Jesu li oni nezavisni?

(b3) (*3 boda*) Neki su parovi studenata prijatelji, pri čemu su prijateljstva uzajamna. Pretpostavimo da svaki student ima točno 20 prijatelja. Ako X označava broj (neuređenih) parova prijatelja koji su završili u istoj učionici, odredite $\mathbb{E}[X]$.

Rješenje.

(a) Pogledati skripte s predavanja.

(b1) Broj studenata u nekoj učionici možemo shvatiti kao broj uspjeha u nizu od 120 nezavisnih slučajnih pokusa, pri čemu svaki ima vjerojatnost uspjeha $\frac{1}{6}$. Dakle, on ima binomnu razdiobu s parametrima 120 i $\frac{1}{6}$. Prema tome, njegovo je očekivanje $120 \cdot \frac{1}{6} = 20$, a varijanca $120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{50}{3}$.

(b2) Iz konačne aditivnosti i nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i,j}) &= \sum_{u=1}^{6} \mathbb{P}(i\text{-ti i } j\text{-ti student u } u\text{-toj učionici}) \\
&= \sum_{u=1}^{6} \mathbb{P}(i\text{-ti student u } u\text{-toj učionici})\mathbb{P}(j\text{-ti student u } u\text{-toj učionici}) \\
&= 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Nadalje, za par različitih događaja $A_{i,j}$, $A_{k,l}$, jasno je da su oni nezavisni ako su parovi $\{i,j\}$, $\{k,l\}$ disjunktni. Ako ti parovi nisu disjunktni, tada je $A_{i,j} \cap A_{k,l}$ događaj da su sva tri studenta iz $\{i,j\} \cup \{k,l\}$ završila u istoj učionici, što slično kao gore ima vjerojatnost $6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Dakle, vrijedi $\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) = \mathbb{P}(A_{i,j})\mathbb{P}(A_{k,l})$, čime smo dokazali da su događaji $(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 120}$ u parovima nezavisni. Međutim, oni nisu nezavisni jer npr.

$$\mathbb{P}(A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{2,3}) = \mathbb{P}(\text{studenti } 1,2,3 \text{ u istoj učionici}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \neq \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \mathbb{P}(A_{1,2})\mathbb{P}(A_{1,3})\mathbb{P}(A_{2,3}).$$

(b3) Neka $i \sim j$ označava da su i-ti i j-ti student prijatelji. Iz uvjeta zadatka slijedi da je ukupan broj parova prijatelja $\frac{120 \cdot 20}{2} = 1200$. Kako je $X = \sum_{i \sim j} 1_{A_{i,j}}$, po linearnosti očekivanja slijedi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \sim j} \mathbb{E}[1_{A_{i,j}}] = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}(A_{i,j}) = 1200 \cdot \frac{1}{6} = 200.$$