

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do utorka, 6. prosinca u 12 sati na web-stranici kolegija.

Zadatak 1.

- (a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su A i B događaji za koje vrijedi $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ i $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Pokažite da vrijedi $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.
- (b) (3 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz događaja iz \mathcal{F} . Precizno dokažite da vrijedi $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
- (c) (3 boda) Neka su $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ događaji iz \mathcal{F} za koje vrijedi $\mathbb{P}(A_n) = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ i $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$.
- (d) (2 boda) U liftu zgrade sa 6 katova nalazi se 8 osoba. Izračunajte vjerojatnost da na svakom katu izađe barem 1 osoba.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 2.

(a) Na početku godine, studenti na jednom kolegiju oformili su nekoliko WhatsApp grupa. Poznato je da postoji ukupno 8 takvih grupa te da se svaka grupa sastoji od točno 5 studenata. Nakon toga, studenti su nasumično podijeljeni u dvije grupe za nastavu, pri čemu su sve podjele jednako vjerojatne (moguće je i da neka grupa ostane prazna). Označimo s A događaj da studenti niti jedne WhatsApp grupe nisu svi završili u istoj grupi za nastavu.

(a1) (2 boda) Pokažite da je $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$.

(a2) (3 boda) Ako dodatno znamo da niti jedan student nije član više od jedne WhatsApp grupe, odredite točnu vrijednost $\mathbb{P}(A)$.

(b) (b1) (2 boda) Neka je \mathcal{F} σ -algebra na skupu \mathbb{N} . Ako \mathcal{F} sadrži skup $\{1, 2, \dots, n\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, dokažite da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b2) (3 boda) Pokažite da je

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ili } A^c \text{ je prebrojiv}\}$$

najmanja σ -algebra na skupu \mathbb{R} koja sadrži familiju $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$. [Uputa: prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiv je skup. U ovom zadatku, pojam prebrojivog skupa obuhvaća sve konačne skupove.]

Sve svoje tvrdnje precizno argumentirajte.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 3.

- (a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ i $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$. Dokažite da su tada A i B nezavisni.
- (b) (3 boda) Bacate novčić na kojemu je vjerojatnost da padne pismo jednaka $p \in (0, 1)$. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ proizvoljni, te neka je

$$A = \{\text{u prvom bacanju palo je pismo}\}, A_k = \{\text{u } n \text{ bacanja ukupno je palo } k \text{ pisama}\}.$$

Odredite $\mathbb{P}(A | A_k)$. Postoji li $p \in (0, 1)$ takav da su A i A_k nezavisni?

- (c) Oko okruglog stola imamo $2n$ stolica redom označene brojevima $1, 2, \dots, 2n$, za $n \geq 2$. Pretpostavimo da n bračnih parova na slučajan način sjedne na tih $2n$ stolica, pri čemu muškarci slučajno sjednu na neparna, a žene na parna mjesta.
- (c1) (2 boda) Ako je $A_i = \{i\text{-ta žena sjedi do svog muža}\}$, odredite $\mathbb{P}(A_i)$, za sve $i = 1, \dots, n$.
- (c2) (3 boda) Ako je N ukupan broj žena koje sjede do svojih muževa, odredite $\mathbb{E}[N]$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 4.

- (a) (2 boda) Ako je X diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u skupu \mathbb{N} te A proizvoljan događaj takav da je $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X | A]\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[X | A^c]\mathbb{P}(A^c).$$

- (b) Luka i Mateo naizmjenice bacaju svaki svoj novčić. Lukin novčić pada na pismo s vjerojatnošću $p_L \in (0, 1)$, a Mateov s vjerojatnošću $p_M \in (0, 1)$. Neka je T broj bacanja dok netko od njih dvojice prvi puta ne dobije pismo, pri čemu Luka (kao kapetan) baca prvi.
- (b1) (2 boda) Odredite distribuciju slučajne varijable T .
- (b2) (2 boda) Odredite vjerojatnost da će Luka prvi dobiti pismo.
- (b3) (4 boda) Koristeći formulu iz (a) dijela zadatka, pokažite da je $\mathbb{E}[T] = 1 + q_L \mathbb{E}[T']$, pri čemu je $q_L = 1 - p_L$, a T' broj bacanja do prvog pisma u slučaju da Mateo baca prvi. Pronađite sličan izraz za $\mathbb{E}[T']$ te izračunajte $\mathbb{E}[T]$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 5. Igrač igra igru u kojoj istovremeno baca 3 simetrične kocke i pobjeđuje ukoliko se na barem 2 kocke pojavio isti broj.

- (a) (1 bod) Odredite vjerojatnost pobjede u takvoj igri.
- (b) (2 boda) Definirajte matematičko očekivanje i varijancu za diskretnu slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koja poprima vrijednosti u \mathbb{Z} .
- (c) (3 boda) Ukoliko promatramo n uzastopnih, nezavisnih ponavljanja opisane igre i s X označimo slučajnu varijablu koja predstavlja broj ostvarenih pobjeda, kako nazivamo takvu slučajnu varijablu (s obzirom na njenu razdiobu)? Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X . (Napomena: Potrebno je "izvesti" formulu za matematičko očekivanje i varijancu za slučajnu varijablu X , a ne koristiti gotovu formulu za takvu vrstu slučajnih varijabli.)
- (d) (4 boda) Ukoliko igrač u svakoj igri uloži 1 kn, te dobije 3 kn ukoliko je pobijedio i 0 kn ukoliko je izgubio, kolika će mu biti očekivana zarada nakon odigranih 30 igri? Kolika je očekivana zarada nakon 30 odigranih igri ukoliko se igra promijeni na način da nakon prvog bacanja igrač ponovno mora, ukoliko postoji, baciti jednu (bilo koju) kocku na kojoj se pojavljuje broj isti kao na nekoj drugoj kocki, te se tek nakon toga odredi da li je pobijedio u toj igri (primjerice, ukoliko je u prvom bacanju igrač bacio 3, 6, 6, mora ponovno baciti neku od kocki na kojoj je pao 6, i ako nakon tog bacanja više nema 2 kocke na kojima se pojavio jednak broj, izgubio je u toj igri)?