Poglavlje 7

Stereometrija

Stereometrijom nazovamo geometriju (trodimenzionalnog euklidskog) prostora.

Osnovni elementi prostora su *točke*, *pravci* i *ravnine*. Aksiome geometrije prostora nećemo navoditi.

7.1 Međusobni položaji točaka, pravaca i ravnina

Dvije točke mogu se podudarati i razlikovati.

Točka i pravac mogu biti u ovim međusobnim položajima:

a) točka T leži na pravcu p,

b) točka T leži izvan pravca p.

Točka i ravnina mogu biti u ovim međusobnim položajima:

a) točka T leži u ravnini π,

b) točka T leži izvan ravnine π.

Dva pravca mogu biti u sljedećim međusobnim položajima:

a) pravci p_1 i p_2 se podudaraju,

b) pravci p_1 i p_2 su paralelni i različiti,

c) pravci p_1 i p_2 se sijeku,

d) ništa od ranije navedenog.

U posljednjem slučaju pravci nisu paralelni i ne sijeku se. Za takve pravce kažemo da su *mimosmjerni* ili *mimoilazni*.

Dvije ravnine mogu biti u ovim međusobnim položajima:

a) ravnine π_1 i π_2 se podudaraju,

b) ravnine π_1 i π_2 su paralelne i različite,

c) ravnine π_1 i π_2 se sijeku.

U posljednjem slučaju presjek ravnina π_1 i π_2 je pravac.

Pravac i ravnina u prostoru mogu biti u sljedećim međusobnim položajima:

a) pravac p leži u ravnini π,

b) pravac p i ravnina π se ne sijeku,

c) pravac p probada ravninu π.

Ako se pravac i ravnina ne sijeku, oni su paralelni.

Ako pravac probada ravninu, njihov presjek je jedna točka.

Uočimo i ovo:
Ako dvije različite točke pravca p leže u ravnini π, onda pravac p leži u ravnini π.

Paralelnost

U navedenim međusobnim odnosima više puta se pojavila riječ "paralelni". Ovdje želimo precizno definirati te pojmove.

Ranije smo definirali da su dva pravca u ravnini *paralelna* ako se podudaraju ili se ne sijeku. U geometriji prostora, tu definiciju moramo modificirati:

Dva pravca u prostoru su *paralelna* ako se podudaraju, ili se ne sijeku ali leže u istoj ravnini.

Definira se i paralelnost pravca i ravnine te paralelnost dviju ravnina.

Dvije ravnine u prostoru su *paralelne* ako se ne sijeku ili se podudaraju.

Za pravac i ravninu u prostoru kažemo da su *paralelni* ako se ne sijeku ili pravac leži u ravnini.

Uočimo sljedeće:

Ako je pravac p paralelan s ravninom π, onda u ravnini π postoji pravac paralelan s pravcem p.

Određenost ravnine

Ako su dani:

a) tri nekolinearne točke

b) pravac i točka koja ne leži na tom pravcu

c) dva pravca koja se sijeku

d) dva različita paralelna pravca

onda postoji jedinstvena ravnina koja ih sadrži.

U prvom slučaju ne treba posebno naglašavati da te tri točke trebaju biti različite, jer to slijedi iz nekolinearnosti.

Podsjetimo se:

Točke su *kolinearne* ako leže na istom pravcu. Dakle, točke su kolinearne ako postoji pravac na kojem sve te točke leže. Dvije točke su uvijek kolinearne.

Točke su *komplanarne* ako leže u istoj ravnini. Tri točke su uvijek komplanarne.

Mimosmjernost / mimoilaznost

Umjesto da kažemo *dva pravca su mimosmjerna (mimoilazna) ako se ne sijeku i nisu paralelni* možemo definirati:

Za dva pravca kažemo da su *mimosmjerni (mimoilazni)* ako ne postoji ravnina u kojoj leže oba pravca.

7.2 Okomitost

Okomitost pravaca

Podsjetimo se, za dva pravca u ravnini kažemo da su *okomiti* ako zatvaraju pravi kut. To je kut koji je jednak (sukladan, iste mjere) svom sukutu.

Sada želimo tu definiciju proširiti i na pravce koji ne leže u istoj ravnini, dakle na mimosmjerne pravce.

Neka su p i q dva mimosmjerna pravca. Odaberimo jednu točku A na pravcu p. Kroz tu točku prolazi točno jedan pravac paralelan s pravcem q (prema Petom Euklidovom aksiomu). Označimo taj pravac sa q_1.
Kažemo da su pravci p i q *okomiti* ako su pravci p i q_1 okomiti.

Ako su pravci p i q okomiti, pišemo $p \perp q$.

Kasnije ćemo na sličan način definirati i kut između mimosmjernih pravaca.

Pravci p i q_1 se sijeku u točki A pa leže u istoj ravnini, te znamo odrediti jesu li oni okomiti ili nisu. Ipak, nismo još sigurni da je ova definicija dobra. Što bi bilo da smo umjesto točke A uzeli neku drugu točku B pravca p i kroz nju povukli paralelu q_2 s pravcem q? Recimo da vrijedi $q_1 \perp p$, da li je nužno i $q_2 \perp p$?

Da, jer iz $q_1 \parallel q$, $q_2 \parallel q$ slijedi $q_1 \parallel q_2$ (dokažite to!), a za pravce p, q_1, q_2 koji leže u istoj ravnini, zbog $q_1 \parallel q_2$, ekvivalentne su tvrdnje $q_1 \perp p$ i $q_2 \perp p$.

Dakle, svejedno je koju točku pravca p odaberemo.

Možemo li zamijeniti ulogu pravaca p i q? Tj. ako je $p \perp q$, da li je i $q \perp p$?
Dokažimo da je relacija $\perp$ simetrična.

Treba provjeriti hoćemo li dobiti isti rezultat i ako odaberemo točku B na pravcu q, kroz nju postavimo paralelu p_1 s pravcem p te utvrdimo jesu li q i p_1 okomiti.

Vrijedi $p_1 \parallel p$ i $q_1 \parallel q$, pa je

$$p \perp q \quad \Leftrightarrow \quad p \perp q_1 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 \perp p \quad \Leftrightarrow \quad q \perp p_1 \quad \Leftrightarrow \quad q \perp p.$$

Pritom ekvivalencija $q_1 \perp p \ \Leftrightarrow \ q \perp p_1$ vrijedi jer su p i q_1 pravci u jednoj ravnini, a pravci p_1 i q njima paralelni pravci u paralelnoj ravnini. Dokažite to svojstvo!

Okomitost pravca i ravnine

Kažemo da je pravac p *okomit* na ravninu π ako je okomit na svaki pravac te ravnine.

Postavlja se pitanje: treba li zaista gledati baš sve pravce u toj ravnini? Ne!

Jasno je da je dovoljno gledati samo pravce koji prolaze ishodištem.

No, dokazat ćemo puno više od toga: dovoljno je promatrati dva neparalelna pravca!

Teorem 1. *Pravac je okomit na ravninu ako je okomit na neka dva neparalelna pravca te ravnine.*

Dokaz. Neka je π ravnina i p pravac koji probada tu ravninu u točki T. Neka su a i b pravci u ravnini π koji su okomiti na pravac p. Zbog definicije okomitosti mimosmjernih pravaca možemo pretpostaviti da a i b prolaze kroz T.

Želimo dokazati da je pravac p okomit na sve pravce ravnine π. Opet, dovoljno je to pokazati za pravce koji prolaze kroz T.

Neka je q pravac koji leži u ravnini π i prolazi točkom T. Dokazat ćemo da je $p \perp q$.

Neka su P_1 i P_2 točke na pravcu p, s različitih strana ravnine π, takve da je $|TP_1| = |TP_2|$.

Odaberimo u ravnini π pravac koji ne prolazi kroz T i koji siječe pravce a, b i q redom u točkama A, B i Q.

Promotrimo trokute $\triangle ATP_1$ i $\triangle ATP_2$. Oni su sukladni (zašto?), pa zaključujemo $|AP_1| = |AP_2|$. Analogno dobivamo $|BP_1| = |BP_2|$.

Sada možemo zaključiti da je $\triangle ABP_1 \cong \triangle ABP_2$, pa je $\sphericalangle ABP_1 = \sphericalangle ABP_2$ tj. $\sphericalangle QBP_1 = \sphericalangle QBP_2$.

Dalje slijedi $\triangle QBP_1 \cong \triangle QBP_2$, pa je $|P_1Q| = |P_2Q|$. Konačno, $\triangle P_1QP \cong \triangle P_2QP$, pa je $\sphericalangle P_1PQ = \sphericalangle P_2PQ$. Kako su to sukuti, to su pravi kutovi i time smo dokazali da je $p \perp q$. □

Primijetimo da je ravnina određena jednom svojom točkom i nekim pravcem koji je okomit na nju.

Okomitost dviju ravnina

Definicija: *Kažemo da je ravnina okomita na drugu ravninu ako sadrži pravac koji je okomit na tu ravninu.*

Simbolima zapisano: $\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad (\exists p \subset \pi_1)\ p \perp \pi_2.$

Neka je $\pi_1 \perp \pi_2$. Dokažimo da je tada i $\pi_2 \perp \pi_1$.

Prema definiciji, u ravnini π_1 postoji pravac p koji je okomit na π_2. Neka p probada ravninu π_2 u točki O, neka je p' neki drugi pravac kroz O u ravnini π_1. Trebamo naći pravac q u ravnini π_2 koji je okomit na p i na p'.

Ravninu okomitu na p' kroz O nazovimo σ. Kako je $p' \neq p$, vrijedi $\sigma \neq \pi_2$. Obje ravnine sadrže točku O, pa se sijeku po pravcu. Nazovimo taj pravac q.

Pravac q leži u ravnini σ pa je okomit na p', jer je $p' \perp \sigma$.

S druge strane q leži u π_2, a $p \perp \pi_2$, pa je q okomit na p.

Dokazali smo da je q okomit na dva različita pravca p i p', pa je okomit i na ravninu određenu tim pravcima, tj. na ravninu π_1. Time je dokaz završen.

Primijetimo da za danu točku T i danu ravninu π postoji jedinstven pravac kroz T koji je okomit na ravninu π.

Definicija: *Ortogonalna projekcija* točke T na ravninu π je probodište ravnine π i pravca q koji prolazi kroz T i okomit je na π.

Što je ortogonalna projekcija pravca na ravninu? Po definiciji, to je skup ortogonalnih projekcija svih točaka pravca. Ortogonalna projekcija pravca na ravninu je najčešće pravac. Ortogonalna projekcija pravca okomitog na ravninu je jedna točka.

Teorem o tri normale

Teorem 2 (Teorem o tri normale)**.** *Ako je ortogonalna projekcija p' pravca p na ravninu π okomita na neki pravac q te ravnine, onda je i pravac p okomit na q. Vrijedi i obratno, ako je p okomit na q, onda je p' okomit na q.*

Dokaz. Treba dokazati da je $p' \perp q \Leftrightarrow p \perp q$.

Neka je T točka u kojoj pravac p probada ravninu π. Neka je A bilo koja druga točka pravca p i A' njena projekcija na ravninu. Pravac AA' je normala ravnine π, označimo ga sa n. Pravac n okomit je na ravninu π, odnosno na svaki pravac u toj ravnini.

Dokažimo najprije $p' \perp q \Rightarrow p \perp q$.

Neka je $p' \perp q$. Kako je i $n \perp q$, slijedi da je pravac q okomit na ravninu koja sadrži n i p', a to je ravnina određena točkama A, A' i T. Stoga je pravac q okomit na pravac AT, tj. $q \perp p$.

Slično se dokazuje da $p \perp q \Rightarrow p' \perp q$:

Neka je $p \perp q$. Kako je $q \perp n$, pravac q okomit je na ravninu određenu točkama A, A' i T. Pravac p' leži u toj ravnini, pa je $q \perp p'$. □

7.3 Kut

Kut između dva pravca

Znamo odrediti kut između dvaju pravaca u ravnini. Kut između dva mimosmjerna pravca definira se slično kao okomitost mimosmjernih pravaca.

Definicija: *Neka su p i q dva mimosmjerna pravca. Odaberimo jednu točku A na pravcu p. Neka je q_1 pravac kroz točku A koji je paralelan s pravcem q. Kut između pravaca p i q definira se kao kut između p i q_1.*

Kut između paralelnih pravaca je $0°$, a kut između okomitih pravaca $90°$. U svim ostalim slučajevima, kut između pravaca je između te dvije vrijednosti.

Kut između pravca i ravnine

Kut između pravca i ravnine definira se kao kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na tu ravninu. Ovo naravno ima smisla samo ako je ortogonalna projekcija pravac. Ako je pravac okomit na ravninu, kut između pravca i ravnine je $90°$.

Ako su pravac i ravnina paralelni, kut između njih je $0°$.

Kut između dvije ravnine

Ako su ravnine paralelne, kut je 0°.

Neka se dvije ravnine π_1 i π_2 sijeku duž pravca p, i neka je σ bilo koja ravnina okomita na pravac p.

Ravnina σ siječe ravninu π_1 duž pravca q_1, a ravninu π_2 duž pravca q_2.

Kut između ravnina π_1 i π_2 definira se kao kut između pravaca q_1 i q_2.

Uočimo da su pravci q_1 i q_2 okomiti na pravac p.

7.4 Udaljenost

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dva skupa točaka u ravnini. Udaljenost tih skupova je "najmanja" udaljenost među točkama tog skupa. Malo preciznije:

$$d(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \inf\{d(A,B) \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Za naše potrebe, skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su zatvoreni, pa se infimum može zamijeniti s minimumom.

Udaljenost dvije točke je duljina dužine kojoj su te točke krajevi.

Udaljenost točke od pravca je udaljenost te točke od njene ortogonalne projekcije na taj pravac. Dokažite to!

Udaljenost točke od ravnine je udaljenost te točke od njene ortogonalne projekcije na tu ravninu. Uvjerite se u to!

Udaljenost dva pravca.

Udaljenost dvaju paralelnih pravaca je udaljenost jedne (bilo koje) točke prvog pravca od njene ortogonalne projekcije na drugi pravac.

Udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca postiže se na njihovoj zajedničkoj normali, tj. ako je n zajednička normala pravaca a i b, i ako n siječe pravac a u točki A, a pravac b u točki B, onda je $d(a,b) = d(A,B)$.

Zajednička normala dvaju pravaca je pravac koji je okomit na oba pravca. Svaka dva pravca imaju zajedničku normalu. Za mimosmjerne pravce ona je jedinstvena.

Ako se pravci sijeku, udaljenost između njih je nula.

Udaljenost pravca od ravnine

Ako je pravac paralelan s ravninom, njihova udaljenost jednaka je udaljenosti bilo koje točke pravca od ravnine.

Ako se pravac i ravnina sijeku, udaljenost među njima je nula.

Udaljenost dvije ravnine

Udaljenost dviju paralelnih ravnina jednaka je udaljenosti bilo koje točke prve ravnine od druge ravnine, tj. od njene ortogonalne projekcije na drugu ravninu.

Ako se dvije ravnine sijeku, udaljenost među njima je nula.

7.5 Poliedri i obla tijela

Konveksni poliedri

Poliedar je geometrijsko tijelo koje zatvaraju barem četiri mnogokuta od kojih nikoja dva susjedna nisu u istoj ravnini. Ti mnogokuti se nazivaju *strane* poliedra, stranice tih mnogokuta se nazivaju *bridovi* poliedra, a vrhovi svakog od tih mnogokuta se nazivaju *vrhovi* poliedra.

Iz definicije izravno slijedi da se svake dvije strane poliedra ili ne sijeku ili imaju samo jedan zajednički vrh ili imaju samo jedan zajednički brid.

Mi ćemo uglavnom proučavati konveksne poliedre. Svaki konveksni poliedar je presjek konačnog broja poluprostora.

Neka su u dvjema različitim paralelnim ravninama dana dva međusobno sukladna poligona s paralelnim odgovarajućim stranicama. Poliedar određen tim poligonima i spojnicama odgovarajućih vrhova tih poligona naziva se ***prizma***. Ta se dva poligona zovu *baze (osnovke) prizme*, a spojnice odgovarajućih vrhova (sve su međusobno paralelne i sukladne) zovu se *pobočni bridovi prizme*. Dva susjedna pobočna brida i dva odgovarajuća brida baze čine paralelogram kojeg nazivamo *pobočka prizme*. Sve pobočke prizme čine njeno *pobočje*.

Dužina koja spaja dva vrha prizme koji ne leže na istoj strani naziva se *prostorna dijagonala prizme*. Ako je baza prizme trokut (odnosno četverokut, peterokut, ...), govorimo o *trokutnoj* (odnosno četverokutnoj, peterokutnoj, ...) ili *trostranoj* (odnosno četverostranoj, peterostranoj, ...) *prizmi*. Uočimo da trokutna prizma ima pet strana: dvije osnovke i tri pobočke.

Prizma kojoj su pobočni bridovi okomiti na ravnine baza naziva se *uspravna prizma*; inače se naziva *kosa prizma*. Bridovi uspravne prizme jednaki su njenoj visini, a pobočke uspravne prizme su pravokutnici. Uspravna prizma kojoj su baze pravilni poligoni naziva se *pravilna prizma*; njene pobočke su međusobno sukladni pravokutnici.

Prizma kojoj su baze paralelogrami naziva se *paralelepiped*. Iz ove definicije slijedi da su sve strane paralelepipeda (ima ih šest) paralelogrami. Uspravni paralelepiped kojemu su baze pravokutnici naziva se *pravokutni paralelepiped (kvadar)*. Definicija povlači da su sve strane pravokutnog paralelepipeda pravokutnici. Pravokutni paralelepiped kojemu su svi bridovi sukladni zove se *kocka*.

Neka su zadani konveksni n-terokut $A_1A_2\dots A_n$ u ravnini Π i točka V koja ne leži u Π. Poliedar određen tim n-terokutom i spojnicama točke V s vrhovima tog n-terokuta naziva se (*n-terostrana*) ***piramida*** (za $n = 3$ trostrana piramida, za $n = 4$ četverostrana piramida, ...). Mnogokut $A_1A_2\dots A_n$ naziva se *baza (osnovka) piramide*, točke A_1, A_2, ... , A_n nazivaju se *vrhovi baze*, a točka V *vrh piramide*. Stranice n-terokuta $A_1A_2\dots A_n$ zovu se *bridovi baze*, a spojnice vrha V s vrhovima baze zovu se *pobočni bridovi piramide*. Trokut koji se sastoji od brida baze i dva odgovarajuća pobočna brida naziva se *pobočka piramide*. Sve pobočke piramide čine njeno *pobočje*.

Spojnica vrha V i njegove ortogonalne projekcije na ravninu Π naziva se *visina piramide*. Za piramidu kažemo da je *uspravna* ako je ortogonalna projekcija vrha piramide središte baze (taj pojam ima smisla npr. kada je baza pravilni mnogokut ili pravokutnik). Kažemo da je piramida *pravilna* ako je uspravna, a baza joj je pravilni mnogokut.

Trostrana piramida naziva se *tetraedar*. Baza, ali i sve tri pobočke tetraedra su trokuti. Stoga se bilo koji od ta četiri trokuta može uzeti za bazu piramide.

Piramidu presjecimo ravninom π_2 koja je paralelna ravnini njene baze π_1, tako da u ravnini π_2 dobijemo mnogokut koji je sličan bazi te piramide. Dio promatrane piramide omeđen ravninama π_1 i π_2 je ***krnja piramida***. Njene baze su mnogokuti u tim dvjema ravninama. Njene pobočke su trapezi. Uočite da krnja piramida nije piramida!

Teorem 3 (Eulerova formula)**.** *Za svaki konveksan poliedar vrijedi* $v - b + s = 2$*, gdje je* v *broj njegovih vrhova,* b *broj bridova, a* s *broj strana.*

Dokaz. Zamislimo da je poliedar od rastezljive gume. Uklonimo jednu njegovu stranu i rastegnimo mrežu poliedra u ravninu, tako da bridovi uklonjene strane budu vanjski rubovi nastalog lika u ravnini. Kako nas zanima samo broj vrhova, strana i bridova, nije bitno što se pri rastezanju promijenio oblik. No, možemo postići da sve strane položene u ravninu ostanu mnogokuti, tj. da bridovi ostanu ravni.

Odredit ćemo zbroj kutova u svim mnogokutima na nastaloj slici na dva načina.

Neka su v, b i s redom broj vrhova, bridova i strana promatranog poliedra. Na slici je v vrhova, od kojih v_1 pripada uklonjenoj strani poliedra, pa su to vanjski vrhovi mnogokuta na slici. Preostalih $v - v_1$ vrhova nalazi se u unutrašnjosti mnogokuta.

Zato zbroj svih kutova možemo izračunati kao zbroj svih kutova jednog v_1-terokuta i $(v - v_1)$ punih kutova:

$$Z = (v_1 - 2) \cdot 180^\circ + (v - v_1) \cdot 360^\circ = (2v - v_1 - 2) \cdot 180^\circ.$$

S druge strane, istu sumu možemo dobiti kao zbroj suma unutarnjih kutova svih "malih" mnogokuta na slici, nastalih od strana poliedra.

Njih ima $s - 1$, jer je jedna strana uklonjena. Označimo brojeve njihovih vrhova s $n_1, n_2, \ldots, n_{s-1}$.

Vrijedi

$$Z = \sum_{i=1}^{s-1} (n_i - 2) \cdot 180^\circ = (n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1} - 2(s-1)) \cdot 180^\circ.$$

Dakle, možemo izjednačiti

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1} - 2(s-1) = 2v - v_1 - 2.$$

Pritom je $n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1}$ ukupan broj bridova na slici, ali su "unutarnji" brojani dvaput. Zato vrijedi

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{s-1} = 2b - v_1.$$

Uvrstimo li to u prethodnu jednakost, dobivamo:

$$\begin{aligned}(2b - v_1) - 2(s-1) &= 2v - v_1 - 2,\\ 2b - 2s + 2 &= 2v - 2,\\ b - s + 1 &= v - 1\end{aligned}$$

i konačno, $v - b + s = 2$. $\square$

Pravilni poliedri

Kažemo da je konveksni poliedar ***pravilan*** ako su mu sve strane sukladni pravilni mnogokuti, a u svakom se vrhu sastaje jednako mnogo bridova.

Odredimo sve konveksne poliedre. Strane konveksnog poliedra mogu biti jednakostranični trokuti, kvadrati ili pravilni peterokuti, ali ne šesterokuti, sedmerokuti,...

U jednom vrhu može se sastati 3, 4 ili najviše 5 jednakostraničnih trokuta, te najviše tri kvadrata ili pravilna peterokuta. Zaključujemo postoji pet pravilnih tijela. Nazivi kao i ukupan broj bridova, vrhova i strana tih poliedara navedeni su u tablici.

naziv	v	b	s	strane
(pravilni) tetraedar	4	6	4	trokuti
(pravilni) oktaedar	6	12	8	trokuti
(pravilni) ikosaedar	12	30	20	trokuti
kocka (heksaedar)	8	12	6	kvadrati
(pravilni) dodekaedar	20	30	12	peterokuti

Pravilne poliedre zovemo i *Platonova tijela*.

Obla tijela

Neka je $K = K(S, r)$ krug u ravnini Π te neka je S' točka u ravnini Π' paralelnoj sa Π. Skup svih točaka koje pripadaju dužinama $\overline{TT'}$ paralelnim i sukladnim sa $\overline{SS'}$, pri čemu je T bilo koja točka kruga K, a $T' \in \Pi'$, naziva se ***valjak***.

Krugove $K(S, r)$ i $K(S', r)$ nazivamo *baze (osnovke) valjka*. Dužine $\overline{TT'}$ paralelne sa $\overline{SS'}$, pri čemu T prolazi kružnicom $k(S, r)$, nazivamo *plašt valjka*. Pravac SS' naziva se *os valjka*. Presjek valjka ravninom koja sadrži os valjka zove se *osni presjek* valjka.

Visina valjka je spojnica točke S i njene ortogonalne projekcije S' na ravninu Π'. Ako je os valjka okomita na osnovke, valjak nazivamo *uspravan valjak*, inače je *kosi*. Ako je valjak uspravan, visina mu je upravo $\overline{SS'}$.

Neka je $K = K(S, r)$ krug u ravnini Π i V točka koja ne leži u Π. Skup svih točaka koje leže na dužinama koje spajaju točku V i bilo koju točku kruga K naziva se ***stožac***.

Točka V se naziva *vrh stošca*, a krug K *baza (osnovka) stošca*. Dužine koje spajaju vrh V s točkama kružnice $k(S, r)$ zovu se *izvodnice stošca*. Skup svih točaka na svim izvodnicama naziva se *plašt stošca*. Pravac VS naziva se *os stošca*. Presjek stošca ravninom koja sadrži os valjka zove se *osni presjek*.

Visina stošca je spojnica vrha V i njegove ortogonalne projekcije V' na ravninu Π. Ako je dužina $\overline{VS}$ okomita na osnovku, stožac nazivamo *uspravan stožac*, inače je *kosi*. Ako je stožac uspravan, visina mu je upravo $\overline{VS}$.

Presjecimo stožac ravninom koja je paralelna ravnini njegove osnovke. Dio stošca omeđen tim dvjema ravinama zovemo ***krnji stožac***.

Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke S tog prostora. Točka S naziva se *središte sfere*, a udaljenost od točke sfere do S zovemo *polumjer (radijus) sfere* i označavamo sa r.

Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od čvrste točke S tog prostora nije veća od određene konstante pozitivne vrijednosti.

Oplošje i volumen

Oplošje geometrijskog tijela je ukupna površina svih ploha koje ga omeđuju. Oplošje poliedra je zbroj površina svih njegovih strana. Kod oblih tijela određivanje oplošja je složenije. *Volumen* geometrijskog tijela je mjera prostora kojeg tijelo zauzima.

Prizma

B – površina baze, P – površina pobočja, o –opseg baze, v – duljina visine

Oplošje: $O = 2B + P$ *Volumen:* $V = Bv$

Za uspravnu prizmu vrijedi $O = 2B + ov$.

Volumen prizme jednak je umnošku površine baze i duljine visine.

Piramida

B – površina baze, P – površina pobočja, v – duljina visine

Oplošje: $O = B + P$ *Volumen:* $V = \dfrac{1}{3}Bv$

Volumen piramide jednak je trećini umnoška površine baze i duljine visine piramide.

Krnja piramida

B_1, B_2 – površine baza, P – površina pobočja, v – duljina visine

Oplošje: $O = B_1 + B_2 + P$ *Volumen:* $V = \dfrac{v}{3}\left(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right)$

Valjak

r – polumjer baze, v – duljina visine

Oplošje: $O = 2r\pi(r + v)$ *Volumen:* $V = r^2\pi v$

Oplošje valjka jednako je zbroju površina dviju baza i plašta.

Volumen valjka jednak je umnošku površine baze i duljine visine.

Stožac

r – polumjer baze, v – duljina visine, s – duljina izvodnice

Oplošje: $O = r\pi(r + s)$ *Volumen:* $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi v$

Oplošje stošca jednako je zbroju površina baze i plašta stošca.
Površina plašta dana je formulom $P = r\pi s$.

Volumen stošca jednak je trećini umnoška površine baze i duljine visine.

Krnji stožac

r_1, r_2 – polumjeri baza, v – duljina visine, s – duljina izvodnice

Oplošje: $O = r_1^2\pi + (r_1 + r_2)\pi s + r_2^2\pi$ *Volumen:* $V = \dfrac{v\pi}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

Oplošje krnjeg stošca zbroju površina njegovih baza i plašta.
Površina plašta dana je formulom: $P = (r_1 + r_2)\pi s$.

Kugla / sfera

r – polumjer kugle

Površina sfere: $O = 4r^2\pi$ *Volumen kugle:* $V = \dfrac{4}{3}r^3\pi$