

# ELEMENTARNA GEOMETRIJA – zadaci s vježbi

## 5. Teoremi o kružnici

1. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.
2. Neka su  $A$  i  $B$  točke na kružnici  $k$  i neka je  $t$  tangenta na kružnicu u točki  $A$ . Dokažite da je kut između tangente  $t$  i tetive  $\overline{AB}$  jednak obodnom kutu nad tom tetivom.
3. Neka je  $ABC$  pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu  $C$ . Koje točke leže na njegovoj Feuerbachovoj kružnici? Dokažite to ne pozivajući se na teorem o Feuerbachovoj kružnici.
4. Konstruirajte trokut ako je zadano: duljina stranice  $a$ , mjera kuta  $\alpha$  i duljina visine  $v_a$ .
5. Neka su  $A_1, B_1, C_1$  nožišta visina trokuta  $ABC$ . Dokažite da je ortocentar trokuta  $ABC$  središte kružnice upisane trokutu  $A_1B_1C_1$ .
6. Dokažite da je duljina visine trapeza kojemu se može upisati i opisati kružnica jednaka geometrijskoj sredini duljina njegovih osnovica.
7. Neka je  $\overline{AB}$  zajednička tetiva dviju kružnica. Pravac kroz  $A$  siječe jednu kružnicu još u točki  $C$ , a drugu još u točki  $D$ . Tangente u točkama  $C$  i  $D$  (na odgovarajuće kružnice) sijeku se u točki  $M$ . Dokažite da je  $BCMD$  tetivni četverokut.
8. Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Dokažite da su kružnice opisane trokutima  $ABC$ ,  $HBC$ ,  $AHB$  i  $ABH$  međusobno sukkladne.
9. Zadane su kružnica  $k$  i točka  $M$  unutar nje. Ako se točkom  $M$  povuku dvije međusobno okomite tetive kružnice  $k$ , dokažite da je zbroj kvadrata duljina tih tetiva konstantan.
10. Simetrala kuta  $\sphericalangle BAC$  u trokutu  $ABC$  siječe nasuprotnu stranicu u točki  $S$ . Točka  $T$  je polovište stranice  $\overline{BC}$ . Kružnica opisana trokutu  $AST$  siječe stranicu  $\overline{AB}$  u točki  $D$ , a stranicu  $\overline{AC}$  u točki  $E$ . Dokažite da je  $|BD| = |CE|$ .
11. Neka je  $D$  polovište stranice  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$  i neka je  $E$  točka na stranici  $\overline{AC}$  takva da je  $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$ . Točkom  $E$  povučena je paralela s  $\overline{BC}$  koja siječe  $\overline{AD}$  u točki  $F$ . Dokažite da je  $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$ .
12. Na kružnici polumjera  $r$ , s različitih strana njezina promjera  $\overline{AB}$  dane su točke  $C$  i  $D$  takve da je  $\sphericalangle DAB = 30^\circ$  i  $\sphericalangle CAB = 45^\circ$ . Odredite  $|CD|$ .
13. Neka je  $ABCD$  kvadrat i neka je  $M$  točka na manjem luku  $\widehat{AB}$  kružnice opisane tom kvadratu. Dokažite da
$$\frac{|AM| + |BM|}{|CM| + |DM|}$$
ne ovisi o položaju točke  $M$ .
14. Dan je trokut  $ABC$ . Simetrale kutova  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle C$  sijeku njegovu opisanu kružnicu u točkama  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  redom. Dokažite da je  $|AP| + |BQ| + |CR|$  veće od opsega trokuta.