ELEMENTARNA GEOMETRIJA

popravni kolokvij, 15. 2. 2019.

Napomene: Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 14 bodova.
Vrijeme rješavanja je 150 minuta. Odmah potpišite sva četiri lista papira koje ste dobili.
Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.
Detaljno obrazložite svoje tvrdnje.

1. (bodovi: 3 + 4 + 5 + 2) Obavezna je uporaba geometrijskog pribora.

a) Napišite teorem o Feuerbachovoj kružnici. Nacrtajte trokut čija su dva kuta $45°$ i $60°$ te odredite njegovu Feuerbachovu kružnicu.

b) Neka je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k i neka je t tangenta te kružnice u točki A. Dokažite da pravci AB i t zatvaraju kut jednak obodnom kutu nad kraćim lukom $\widehat{AB}$.

c) Nacrtajte četverokut koji nije pravokutnik, a ima točno dvije osi simetrije (označite ih). Je li tom četverokutu moguće opisati kružnicu? Je li tom četverokutu moguće upisati kružnicu? Obrazložite odgovore!

Ako upisana i/ili opisana kružnica postoje, nacrtajte ih.

d) Kažemo da je konveksni poliedar pravilan ako su mu sve strane sukladni pravilni n-terokuti, a u svakom se vrhu sastaje m bridova. Ako pravilni poliedar ima 30 bridova i 20 strana, koliki su m i n?

2. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut stranice duljine a. Točka P je polovište stranice $\overline{CD}$, a točka Q sjecište dužina $\overline{AP}$ i $\overline{CF}$. Odredite površinu i opseg četverokuta $ABCQ$.

3. Neka je $ABCDE$ tetivni peterokut. Ako je $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEC = \sphericalangle ECD = 45°$, dokažite da vrijedi $|BE|^2 - |BA|^2 = |CE|^2 - |CD|^2$.

4. Omjer duljina stranica paralelograma je $1 : 3$, a duljine dijagonala iznose 10 i $4\sqrt{10}$. Odredite duljine stranica i površinu paralelograma.

5. Osnovka piramide je četverokut $ABCD$ u kojem je $|AB| = 6$, $|BC| = 8$ i $|CD| = 7$. Svi pobočni bridovi zatvaraju s ravninom baze kut od $60°$, a njena visina je $5\sqrt{3}$. Odredite obujam piramide.