1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

ELEMENTARNA GEOMETRIJA

prvi kolokvij - 23. studenog 2018.

Napomene: Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Detaljno obrazložite svoje tvrdnje. Nemojte koristiti trigonometriju, vektore niti metode analitičke geometrije.

Rezultati će biti objavljeni na web-stranici kolegija najvjerojatnije u srijedu 28. 11.

1. (bodovi: 4+1+1+1)

(a) Dokažite da točka M koja stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC dijeli u omjeru preostalih stranica leži na simetrali kuta u vrhu A, tj. ako je $|BM| : |MC| = |BA| : |AC|$ dokažite da je AM simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

(b) Napišite dvije karakterizacije romba (tj. tvrdnje ekvivalentne s definicijom romba).

(c) Nacrtajte jednakokračni trokut s vršnim kutom mjere $30°$ te mu označite četiri osnovne karakteristične točke.

(d) Iskažite Menelajev teorem.

2. Neka je $ABCD$ paralelogram s tupim kutom u vrhu D. Neka su M i N nožišta visina iz tog vrha i neka pritom vrijedi $|BM| = |BN|$. Ako M i N leže na stranicama danog paralelograma (a ne na njihovim produžetcima), dokažite da je $ABCD$ romb.
Je li moguće da neka od točaka M i N leži na produžetku stranice ako je $|BM| = |BN|$? Obrazložite svoj odgovor.

3. Neka su D i E točke na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC takve da je $|AD| = |DE| = |EB|$ i neka su F i G redom točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ takve da je $|BF| = \frac{2}{3}|BC|$ i $|AG| = \frac{2}{3}|AC|$. Odredite omjer površina četverokuta $DEFG$ i trokuta CFG. Obrazložite svoje tvrdnje.

4. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = 12$, $|AC| = 16$, $|BC| = 20$. Točka P je sjecište simetrale kuta $\sphericalangle ABC$ i pravca paralelnog s AB kroz vrh C. Točka Q je sjecište simetrale kuta $\sphericalangle ACB$ i pravca paralelnog s AC kroz vrh B. Odredite udaljenost točaka P i Q.

5. Dan je trokut ABC. Simetrala kuta $\sphericalangle BCA$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Točka O je središte upisane kružnice trokuta ADC i središte opisane kružnice trokuta ABC. Dokažite da je trokut ABC jednakokračan i odredite njegove kutove.

1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

ELEMENTARNA GEOMETRIJA

prvi kolokvij - 23. studenog 2018.

Napomene: Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Detaljno obrazložite svoje tvrdnje. Nemojte koristiti trigonometriju, vektore niti metode analitičke geometrije.

Rezultati će biti objavljeni na web-stranici kolegija najvjerojatnije u srijedu 28. 11.

1. (bodovi: 4+1+1+1)

(a) Dokažite da simetrala BD kuta $\sphericalangle ABC$ trokuta ABC dijeli nasuprotnu stranicu $\overline{AC}$ u omjeru preostalih dviju stranica, tj. da za točku D u kojoj simetrala kuta siječe stranicu $\overline{AC}$ vrijedi $|AD| : |DC| = |AB| : |BC|$.

(b) Napišite dvije karakterizacije paralelograma (tj. tvrdnje ekvivalentne s definicijom paralelograma).

(c) Nacrtajte jednakokračni trokut s dva kuta mjere 30° te mu označite četiri osnovne karakteristične točke.

(d) Iskažite Cevin teorem.

2. Dan je paralelogram $ABCD$ sa šiljastim kutom u vrhu A. Dužine $\overline{BP}$ i $\overline{BQ}$ su visine paralelograma $ABCD$ i vrijedi $|DP| = |DQ|$. Ako su točke P i Q na stranicama danog paralelograma (a ne na njihovim produžetcima), dokažite da je $ABCD$ romb.
Je li moguće da neka od točaka P i Q leži na produžetku stranice ako je $|DP| = |DQ|$? Obrazložite svoj odgovor.

3. Neka su N i M točke na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC takve da je $|BN| = |NM| = |MC|$ i neka su K i L redom točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ takve da je $|BK| = \frac{2}{3}|AB|$ i $|CL| = \frac{2}{3}|AC|$. Odredite omjer površina četverokuta $KLMN$ i trokuta AKL. Obrazložite svoje tvrdnje.

4. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = 5$, $|AC| = 13$, $|BC| = 12$. Točka D je sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i pravca paralelnog s AB kroz vrh C. Točka E je sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BCA$ i pravca paralelnog s BC kroz vrh A. Odredite udaljenost točaka D i E.

5. Dan je trokut ABC. Simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D. Točka O je središte upisane kružnice trokuta BCD i središte opisane kružnice trokuta ABC. Dokažite da je trokut ABC jednakokračan i odredite njegove kutove.