

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Sigma$

Ime i prezime, JMBAG: \_\_\_\_\_

## ELEMENTARNA GEOMETRIJA

popravni kolokvij - 18. veljače 2022.

**Napomene:** Vrijeme rješavanja je 150 minuta.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Teorijski dio (zadatke 1-4) rješavajte na jednom listu, a ostale zadatke svaki na zasebnom listu.

Obavezno napišite svoje ime, prezime i JMBAG na svaki list papira koji predate.

1. (6 b) Definirajte sljedeće pojmove:

- trapez
- simetrala dužine
- tangencijalni četverokut
- sinus kuta
- izometrija ravnine
- okomitost pravca i ravnine

2. (7 b) Dokažite da se visine šiljastokutnog trokuta sijeku u jednoj točki.

3. (12 b) Iskažite teorem o simetrali unutarnjeg kuta trokuta.

Dokažite taj teorem:

- a) bez primjene trigonometrije
- b) koristeći trigonometriju.

4. (5 b) Tesar je iz drva izradio konveksan poliedar čije su dvije paralelne strane pravilni deseterokuti, a sve ostale strane su trokuti. Svaki od tih trokuta ima zajednički brid s jednim od spomenutih dvaju deseterokuta, i jedan zajednički vrh s drugim deseterokutom. Provjerite Eulerovu formulu na primjeru tog poliedra.

Rješenja ovih zadataka zapišite na odvojenim listovima - svaki zadatak na zasebnom papiru. Ne zaboravite na svaki papir napisati svoje ime, prezime i JMBAG.

5. (12 b) Neka je  $ABC$  jednakostraničan trokut i neka su  $A_1, B_1, C_1$  redom točke na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ , takve da je

$$|BA_1| : |A_1C| = |CB_1| : |B_1A| = |AC_1| : |C_1B| = 2 : 1.$$

Dokažite da su sjecišta dužina  $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}$  i  $\overline{CC_1}$  također vrhovi jednakostraničnog trokuta.

6. (12 b) Neka je  $\overline{AB}$  tetiva kružnice  $k_1$ , a  $\overline{MN}$  promjer te kružnice paralelan s  $\overline{AB}$ . Pravac  $t$  dodiruje kružnicu  $k_1$  u točki  $M$ . Pravci  $NA$  i  $NB$  sijeku pravac  $t$  redom u točkama  $C$  i  $D$ . Neka je  $k_2$  kružnica opisana trokutu  $CDN$ .

a) Dokažite da vrijedi  $|MC| \cdot |MD| = |MN|^2$ .

b) Dokažite da je pravac  $MN$  tangenta kružnice  $k_2$ .

7. (12 b) Dan je kvadrat  $ABCD$  sa središtem  $O$ . Neka je  $A'B'C'D'$  slika tog kvadrata pri rotaciji oko točke  $O$  za  $45^\circ$ . Ako duljina stranice danog kvadrata iznosi  $a$ , odredite površinu presjeka likova  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$ .

8. (12 b) Neka je  $\overline{AM}$  težišnica trokuta  $ABC$ . Dokažite da je umnožak polumjera kružnice opisane trokutu  $AMC$  i duljine visine tog trokuta iz vrha  $M$  jednak umnošku polumjera kružnice opisane trokutu  $BMC$  i duljine visine tog trokuta iz vrha  $M$ .

9. (12 b) Dana je kocka  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  brida duljine 2. Točke  $K, L, M$  i  $N$  su redom polovišta bridova  $\overline{AA_1}, \overline{A_1 B_1}, \overline{A_1 D_1}$  i  $\overline{AB}$ . Točkom  $N$  prolazi ravnina  $\pi$  paralelna s ravninom  $KLM$ .

Odredite presjek kocke ravninom  $\pi$ , tj. točke u kojima ta ravnina siječe bridove kocke. Izračunajte površinu tog presjeka. U kojem omjeru ravnina  $\pi$  dijeli volumen kocke?