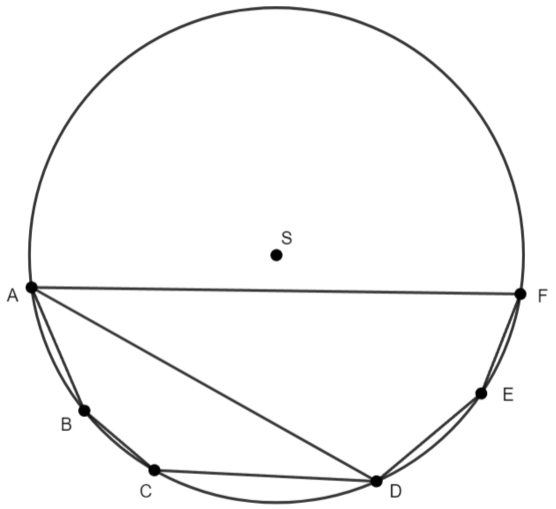
ELEMENTARNA GEOMETRIJA

(Skica) rješenja 2. kolokvija - 2. veljače 2024.

1. Neka je $ABCDEF$ šesterokut upisan u kružnicu. Dokažite da za njegove unutarnje kutove vrijedi
$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F.$$

Rješenje 1.



Uočimo da su četverokuti $ABCD$ i $ADEF$ tetivni te za njih zbog toga vrijedi da im je zbroj nasuprotnih kutova jednak $180°$ (odnosno zbroju preostala dva nasuprotna kuta):

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle C = \sphericalangle ADC + \sphericalangle B$$
$$\sphericalangle DAF + \sphericalangle E = \sphericalangle EDA + \sphericalangle F.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo:

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle C + \sphericalangle DAF + \sphericalangle E = \sphericalangle ADC + \sphericalangle B + \sphericalangle EDA + \sphericalangle F.$$

Iskoristimo li $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DAF = \sphericalangle A$ i $\sphericalangle ADC + \sphericalangle EDA = \sphericalangle D$ dobivamo tvrdnju zadatka:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F.$$

Rješenje 2.
U šesterokutu uočavamo nekoliko tetivnih četverokuta – $ABDF$, $CDFB$ i $EFBD$, te koristimo svojstvo tetivnih četverokuta da im je zbroj nasuprotnih kutova jednak $180°$.

$$\sphericalangle A = 180° - \sphericalangle FDB$$
$$\sphericalangle C = 180° - \sphericalangle BFD$$
$$\sphericalangle E = 180° - \sphericalangle DBF$$

Zbrajanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 3 \cdot 180° - (\sphericalangle FDB + \sphericalangle BFD + \sphericalangle DBF).$$

Zbroj kutova u trokutu ($\triangle BDF$) je $180°$ pa imamo $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 2 \cdot 180°$.

Analogno, promatrajući tetivne četverokute $ABCE$, $CDEA$ i $EFAC$ možemo dobiti

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 2 \cdot 180^\circ = \sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E.$$

Alternativno, možemo izračunati zbroj svih unutarnjih kutova proizvoljnog šesterokuta kao $(n-2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ te iz tog slijedi

$$\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 720^\circ - \sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ = \sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E.$$

Rješenje 3.
Neka je S središte šesterokutu opisane kružnice. Trokuti ASB, BSC, CSD, DSE, ESF i FSA su jednakokračni budući da su im duljine dvaju stranica jednake polumjeru opisane kružnice. (**Oprez:** među tim trokutima ne moraju postojati međusobno sukladni.) Imamo sljedeće jednakosti kutova

$$\begin{aligned}
\alpha &:= \sphericalangle BAS = \sphericalangle SAB \\
\beta &:= \sphericalangle CBS = \sphericalangle SCB \\
\gamma &:= \sphericalangle DCS = \sphericalangle SDC \\
\delta &:= \sphericalangle EDS = \sphericalangle SED \\
\varepsilon &:= \sphericalangle FES = \sphericalangle SFE \\
\varphi &:= \sphericalangle AFS = \sphericalangle SAF
\end{aligned}$$

Izračunajmo sada obje strane jednakosti željene tvrdnje:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E &= (\varphi + \alpha) + (\beta + \gamma) + (\delta + \varepsilon) \\
\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F &= (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) + (\varepsilon + \varphi)
\end{aligned}$$

Uspoređivanjem vidimo da vrijedi

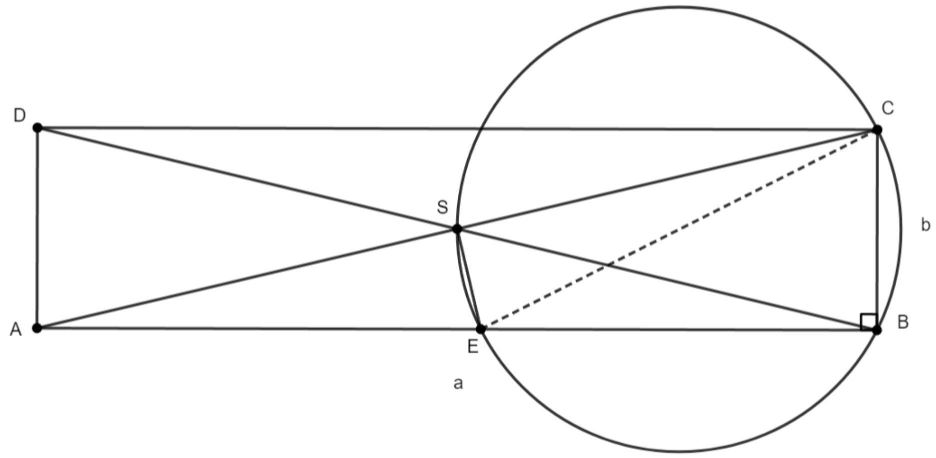
$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \varphi = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F.$$

Rješenje 4. (skica)
Povučemo li sve dijagonale tetivnog šesterokuta uočavamo po 4 jednaka obodna kuta nad svakom tetivom. Slično kao u prethodnom rješenju, svaki unutarnji kut šesterokuta možemo zapisati kao zbroj neka 4 od tih obodnih kutova te uspoređivanjem dobivenih izraza za $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E$ i $\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F$ zaključujemo da su jednaki.

Napomene.

- Šesterokut za koji dokazujemo tvrdnju ne mora nužno biti pravilan. Također, njegove dijagonale $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ ne moraju se sijeći u istoj točki.
- Trokuti $\triangle ABS$ i $\triangle DES$ nisu nužno sukladni (uz oznaku S za središte opisane kružnice).
- Ako dokažemo da vrijedi $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ i $\sphericalangle C = \sphericalangle F$ tvrdnja zadatka će naravno slijediti, ali u proizvoljnom tetivnom šesterokutu ne mora vrijediti $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$, a ipak vrijedi tvrdnja zadatka. Pazite na nužne i dovoljne uvjete.

2. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa stranicama duljina $|AB| = a$ i $|BC| = b$, pri čemu je $a > b$. Kružnica prolazi središtem pravokutnika i vrhovima B i C, te siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E. Odredite duljinu $|BE|$.



Rješenje 1.
Promatramo potenciju točke A s obzirom na zadanu kružnicu opisanu trokutu $\triangle BCS$:

$$|AE| \cdot |AB| = |AS| \cdot |AC|.$$

Primijetimo da sve duljine osim $|AE|$ možemo lako izračunati koristeći Pitagorin poučak i svojstvo dijagonala paralelograma.

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|AS| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Uvrštavanjem u gornji izraz za potenciju točke dobivamo

$$|AE| = \frac{|AS| \cdot |AC|}{|AB|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Konačno, primijetimo da je

$$|BE| = |AB| - |AE| = a - \frac{a^2 + b^2}{2a} = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Rješenje 2.
Vrijedi $\sphericalangle CBA = 90^\circ$ pa znamo da je $\overline{EC}$ promjer zadane kružnice, a onda znamo i da vrijedi $\sphericalangle ESC = 90^\circ$ (argument: teorem o obodnom i središnjem kutu, Talesov teorem, mogli smo to zaključiti i iz tetivnosti četverokuta $EBCS$ – zbroj nasuprotnih kutova je 180°).

Sada uočavamo dva slična trokuta: $\triangle ASE \sim \triangle ABC$ (slični su po K-K poučku, imaju zajednički kut u vrhu A te pravi kut). Iz sličnosti možemo dobiti omjer

$$\frac{|AS|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}.$$

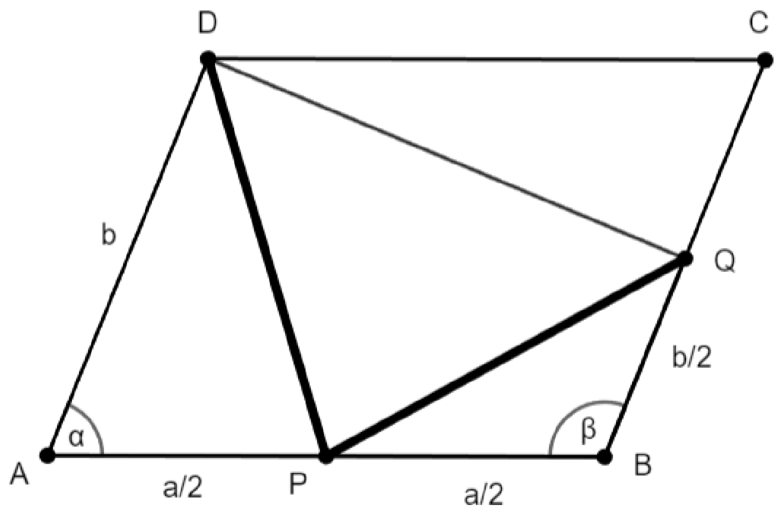
Sada imamo situaciju kao u prethodnom rješenju.

Napomene.

- Naravno, zadatak se mogao riješiti na još načina, ali s kompliciranijim računima. Mogli smo npr. tražiti $|EC|$ pomoću površine trokuta $\triangle BCS$ i formule koja povezuje duljine stranica trokuta, njegovu površinu i polumjer opisane kružnice.
- Trokut $\triangle BCS$ je jednakokračan, ali ne mora biti jednakostraničan. Posljedično, središte tom trokutu opisane kružnice ne mora biti težište (bit će ako je trokut jednakostraničan). Nacrtate li pravokutnik takav da je a puno veći od b bit će vam očitije da ne moramo imati jednakostraničan trokut.

3. Neka je $ABCD$ paralelogram sa šiljastim kutom u vrhu A i neka su P i Q redom polovišta njegovih stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Ako je trokut DPQ jednakokračan s osnovicom $\overline{DQ}$, a omjer duljina stranica paralelograma je $|AB| : |BC| = 5 : 2$, odredite mjeru jednog kuta paralelograma. (Dovoljno je odrediti sinus ili kosinus kuta.)

Rješenje.



Neka je $|AB| = a$, $|BC| = b$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle CAB = \beta$. Vrijedi $a = \frac{5}{2}b$.

Promotrimo informacije koje su nam zadane i koje tražimo: znamo da su duljine $|DP|$ i $|PQ|$ jednake, znamo u kojem su odnosu duljine stranica paralelograma (pa posljedično znamo nešto i o polovištima stranica), a želimo saznati nešto o kutovima paralelograma. Svakako želimo nekako iskoristiti informacije koje imamo. Kako bismo povezali navedene duljine dužina i kutove koristit ćemo kosinusov poučak. Izrazimo $|DP|$ i $|PQ|$ koristeći kosinusov poučak:

$$|DP|^2 = |AD|^2 + |AP|^2 - 2|AD||AP|\cos\alpha$$
$$|PQ|^2 = |PB|^2 + |BQ|^2 - 2|PB||BQ|\cos\beta.$$

Uočimo da i $|AP| = |PB|$ možemo izraziti pomoću b, odnosno

$$|AP| = |PB| = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}b = \frac{5}{4}b.$$

Izjednačimo $|DP|^2 = |PQ|^2$, uvrstimo poznate duljine te iskoristimo $\cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ da dobijemo:

$$\begin{aligned}
|AD|^2 + |AP|^2 - 2|AD||AP|\cdot\cos\alpha &= |PB|^2 + |BQ|^2 - 2|PB||BQ|\cdot\cos\beta \\
b^2 + \cancel{\left(\frac{5b}{4}\right)^2} - 2\cdot b\cdot\frac{5b}{4}\cdot\cos\alpha &= \cancel{\left(\frac{5b}{4}\right)^2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \cancel{2}\cdot\frac{5b}{4}\cdot\frac{b}{\cancel{2}}\cdot\cos\beta \\
\cancel{b^2} - \frac{10\cancel{b^2}}{4}\cdot\cos\alpha &= \frac{\cancel{b^2}}{4} - \frac{5\cancel{b^2}}{4}\cdot\cos(180^\circ-\alpha) \\
1 - \frac{10}{4}\cos\alpha &= \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\cos\alpha \\
-\frac{15}{4}\cos\alpha &= \frac{-3}{4} \\
\cos\alpha &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

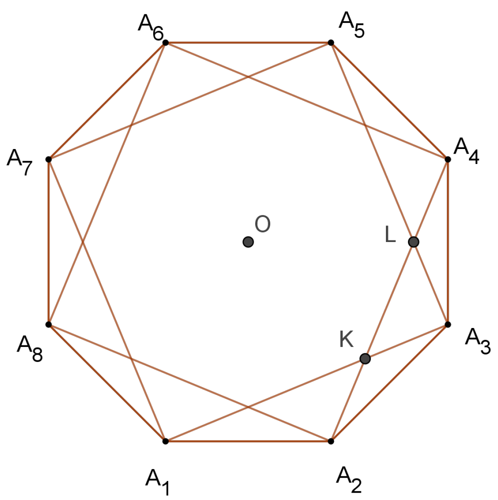
Dakle, budući da je dovoljno odrediti sinus ili kosinus jednog kuta paralelograma, došli smo do rješenja: $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

4. Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ pravilni osmerokut.

   (a) Dokažite da je $A_1A_3A_5A_7$ kvadrat.

   (b) Stranice kvadrata $A_1A_3A_5A_7$ i $A_2A_4A_6A_8$ sijeku se u još osam točaka. Dokažite da su te točke vrhovi pravilnog osmerokuta.

Rješenje.



a) dio može se riješiti na razne načine. Npr. može se pokazati da su A_1A_3O, A_3A_5O, A_5A_7O i A_7A_1O sukladni jednakokračni pravokutni trokuti.

skica rješenja b) dijela

Neka je K sjecište dužina $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$ i neka je L sjecište dužina $\overline{A_2A_4}$ i $\overline{A_3A_5}$. To su dva susjedna vrha osmerokuta.

Označimo središte danog osmerokuta s O. Označimo s r rotaciju oko O za 45°.

Kako je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_6A_7A_8$ pravilni osmerokut, vrijedi $\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \sphericalangle A_3OA_4 = \sphericalangle A_4OA_5 = 45^\circ$. To znači da je $r(A_1) = A_2$, $r(A_2) = A_3$, $r(A_3) = A_4$, $r(A_4) = A_5$.

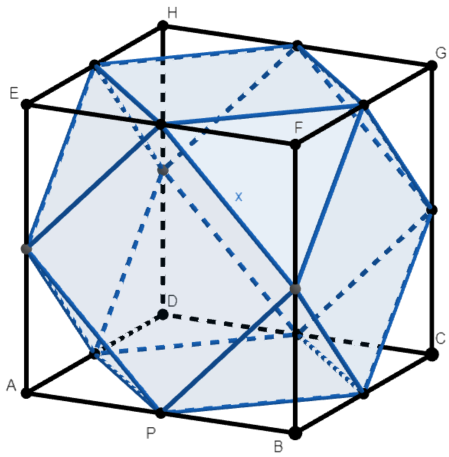
Kako je K sjecište dužina $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$, slika od K je sjecište slika tih dužina pri rotaciji r, tj. sjecište dužina $r(\overline{A_1A_3})$ i $r(\overline{A_2A_4})$.

Rotacija r preslikava dužinu $\overline{A_1A_3}$ u dužinu $\overline{A_2A_4}$, a dužinu $\overline{A_2A_4}$ u dužinu $\overline{A_3A_5}$.

Zato je $r(K)$ sjecište dužina $\overline{A_2A_4}$ i $\overline{A_3A_5}$, a to je upravo točka L. Ovim smo dokazali da je $\sphericalangle KOL = 45°$. Kako slično možemo zaključiti za bilo koja dva susjedna vrha nastalog osmerokuta, zaključujemo da je taj osmerokut pravilan.

5. Dana je kocka volumena a^3. Označena su polovišta svih bridova kocke, a zatim je svaki vrh kocke odsječen ravninom koja prolazi polovištima triju bridova koji se sastaju u tom vrhu. Odredite broj strana, bridova i vrhova dobivenog tijela te provjerite da za njega vrijedi Eulerova formula. Odredite volumen i oplošje tog tijela.

Rješenje.



Svako od 12 polovišta bridova kocke je vrh dobivenog tijela i to su jedini vrhovi pa je broj vrhova $v = 12$. Strane dobivenog tijela su po jedan kvadrat za svaku stranu kocke te po jedan jednakostranični trokut za svaki vrh kocke pa je broj strana $s = 6 + 8 = 14$. Broj bridova možemo izračunati na više načina. Uočimo da strane oblika kvadrata dijele po jedan brid sa 4 strane oblika jednakostraničnog trokuta pa broj bridova možemo dobiti kao $6 \cdot 4 = 24$ (svaki od 6 kvadrata ima po 4 brida).

Uvrstimo li dobivene vrijednosti u Eulerovu formulu $v - b + s = 2$ dobivamo $12 - 24 + 14 = 2$, odnosno formula vrijedi.

Volumen dobivenog tijela možemo dobiti kao volumen kocke umanjen za 8 volumena tetraedara kojima je jedan vrh u vrhu kocke, a preostala tri vrha polovišta bridova koji se sastaju u tom vrhu. Budući da su kutovi između bridova kocke pravi, baza takvog tetraedra (označimo površinu s B) je pravokutni trokut s katetama duljine $a/2$, a visina (označimo s h) također $a/2$. Kad sve to skupimo dobivamo:

$$\begin{aligned} V &= a^3 - 8 \cdot V(\text{tetraedra}) \\ &= a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} Bh \\ &= a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} \\ &= a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6} a^3 \end{aligned}$$

Oplošje dobivamo kao zbroj 6 površina kvadrata (P_K) koji su jedna "vrsta" strana novog tijela i 8 površina jednakostraničnih trokuta (P_T) koji su druga "vrsta" strana novog tijela. Označimo duljinu stranice tog kvadrata s x te odmah primijetimo da je x ujedno i duljina stranice jednakostraničnog trokuta. Tu duljinu možemo izračunati pomoću Pitagorinog poučka budući da je x hipotenuza pravokutnog trokuta s katetama $a/2$:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Površina kvadrata jednaka je umnošku duljina stranica, odnosno $P_K = x^2 = \frac{a^2}{2}$. Površina jednakostraničnog trokuta s duljinom stranice x jednaka je

$$P_T = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Konačno, oplošje novog tijela je

$$O = 6P_K + 8P_T = 6 \cdot \frac{a^2}{2} + 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = a^2(3 + \sqrt{3}).$$

Napomene:

- Eulerovu formulu dokazali smo za **svaki** konveksan poliedar. Stoga, ako računom dobijemo da formula ne vrijedi, to bi nam trebao biti indikator da smo negdje pogriješili.
- Volumen malog tetraedra u svakom vrhu kocke mogli smo računati i tako da jednakostraničan trokut promatramo kao njegovu bazu, ali tada bi računanje visine tetraedra bilo kompliciranije; iskoristite prave kutove.