

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi zimski rok – 5. veljače 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (20 bodova) Zadana je tvrdnja:

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako je njihova simetrična razlika neprazna, onda je simetrična razlika njihovih komplementa neprazna.

- Zapišite zadanu tvrdnju simbolima.
- Zapišite simbolima negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.
- Odredite istinitost zadane tvrdnje. Svoje zaključke detaljno obrazložite. Što možete zaključiti o istinitosti negacije i obrata po kontrapoziciji?

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi zimski rok – 5. veljače 2024.

Zadatak 2. (20 bodova)a) Neka su A , B i C skupovi te neka su

$$S = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C),$$

$$T = ((A \cap B) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A) \cup ((C \cap A) \setminus B).$$

Dokažite da je $T \subseteq S$.b) Na skupu $\mathbb{Z}[x]$ definirana je binarna relacija ρ na sljedeći način:

$$f \rho g \iff f(3) = g(3).$$

Pokažite da je ρ relacija ekvivalencije. Odredite klasu ekvivalencije polinoma

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x + 90.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi zimski rok – 5. veljače 2024.

Zadatak 3. (20 bodova) Označimo s p_k k -ti prosti broj.

- a) Dokažite da je $p_{k+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ za svaki prirodni broj k .
- b) Koristeći a) dio zadatka dokažite da je $p_k < 2^{2^k}$ za svaki prirodni broj k .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi zimski rok – 5. veljače 2024.

Zadatak 4. (20 bodova)

- a) Odredite ostatak pri dijeljenju broja $5^{2023^{2024}}$ s 11.
- b) Neka su $p, n \in \mathbb{N}$ i neka je p prost broj. Odredite, ovisno o p i n , ostatak koji broj

$$1^{1(p-1)} \cdot 2^{2(p-1)} \cdot \dots \cdot n^{n(p-1)}$$

daje pri dijeljenju s p .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi zimski rok – 5. veljače 2024.

Zadatak 5. (20 bodova) Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ takve da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x - 1)^2 f(x - 2) = (x^2 - 8x + 15) f(x).$$