

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi zimski rok – 19. veljače 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) Zapišite simbolima tvrdnju:

Svaki realan broj, koji je nultočka polinoma f , nultočka je polinoma g .
te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji.

(b) Na skupu $\mathbb{R}[x]$ definirana je relacija ρ na sljedeći način:

$$f \rho g \iff \begin{array}{l} \text{Svaki realan broj koji je nultočka} \\ \text{od } f \text{ je nultočka od } g. \end{array}$$

Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna. Sve svoje zaključke detaljno obrazložite.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi zimski rok – 19. veljače 2024.

Zadatak 2. (20 bodova)a) Neka su A , B i C skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$A \Delta B \Delta C \quad \text{i} \quad ((A \cup B) \setminus C) \cup (C \setminus (B \setminus A)).$$

Svoje tvrdnje dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerima.

b) Dokažite da za bilo koja dva skupa A i B vrijedi:

$$A \text{ i } B \text{ su disjunktni} \quad \iff \quad A \times B \text{ i } B \times A \text{ su disjunktni.}$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi zimski rok – 19. veljače 2024.

Zadatak 3. (20 bodova)Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$n^3 + 5n^2 + 3 \leq 11 \cdot 2^n.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi zimski rok – 19. veljače 2024.

Zadatak 4. (20 bodova)a) Dokažite da je za svaki cijeli broj n broj

$$n^{2024} + n^{2024^{2025}} + \dots + n^{2024^{2025 \cdot \dots \cdot 2039}}$$

djeljiv brojem 16.

b) Neka je n prirodan broj. Pretpostavimo da je najmanji prosti djelitelj p od n veći od $\sqrt[3]{n}$. Dokažite da je tada n/p prost ili jednak 1.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi zimski rok – 19. veljače 2024.

Zadatak 5. (20 bodova)

- a) Polinom $f \in \mathbb{Z}[x]$ pri dijeljenju s $x - 2$ daje ostatak 5, a pri dijeljenju s $x^2 + 5x + 6$ ostatak $9x + 20$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $(x + 3)(x^2 - 4)$.
- b) Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{x^2 + 12x - 4}{x^4 - 2x^2 - 8}$$