

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi jesenski rok – 29. kolovoza 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (20 bodova)

a) Neka je $p \in \mathbb{Z}[x]$ polinom. Zapišite simbolima tvrdnju:

Ako p ima racionalnu nultočku, onda je p stupnja većeg ili jednakog 2.

te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji.

b) Na skupu svih cijelih brojeva definirana je binarna relacija ρ :

$$x \rho y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 5 \mid (x + k)^2 + y^2.$$

Pokažite da je ρ relacija ekvivalencije. Neka je \mathcal{S} particija skupa \mathbb{Z} na klase ekvivalencije. Koliko \mathcal{S} ima elemenata?

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi jesenski rok – 29. kolovoza 2024.

Zadatak 2. (20 bodova) Zadani su skupovi A , B , C i D . Ispitajte odnos skupova

$$((A \setminus C) \times (B \setminus D)) \cup ((C \setminus A) \times (D \setminus B)) \quad \text{i} \quad (A \times B) \Delta (C \times D).$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi jesenski rok – 29. kolovoza 2024.

Zadatak 3. (20 bodova)

Niz F_1, F_2, \dots Fibonaccijevih brojeva definiramo sa $F_1 = 1, F_2 = 1$ te $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za sve prirodne brojeve $n \geq 3$. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi jesenski rok – 29. kolovoza 2024.

Zadatak 4. (20 bodova)

- a) Odredite posljednje tri znamenke broja $2123^{2407^{2244}}$.
- b) Dokažite (ne koristeći Dirichletov teorem o prostim brojevima u aritmetičkom nizu) da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $3k - 1$ za $k \in \mathbb{N}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi jesenski rok – 29. kolovoza 2024.

Zadatak 5. (20 bodova)a) Odredite sve nultočke polinoma $p(x) = 3x^3 - 16x^2 + 27x + 26$.b) Rastavite na parcijalne razlomke $\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - x + 3}{(x^4 - 1)(x - 1)}$.