

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (3+4=7 bodova)

- (a) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 14129^{392} sa 7.
- (b) Neka su a, b, c prirodni brojevi i neka je $M(a, b) = M(a, c) = d$.
Dokažite da su prirodni brojevi $V\left(\frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right)$ i $\frac{a}{d}$ relativno prosti.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 2. (5 bodova) Neka je $p \in \mathbb{N}$ neparan prost broj i $n \in \mathbb{N}$. Odredite ostatak koji pri dijeljenju s p daje broj

$$1^p + 2^p + \dots + n^p$$

ako n pri dijeljenju s p daje ostatak $p - 1$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 3. (4+2=6 bodova) Polinom $f \in \mathbb{Z}[x]$ pri dijeljenju s $x^2 - 2x$ daje ostatak $50x - 5$, a pri dijeljenju s $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ daje ostatak $x^2 + 3x + 1$.

- (a) Odredite ostatak pri dijeljenju f s $x^3 - 4x$.
- (b) Može li ostatak pri dijeljenju f s $x - 5$ biti 11? Obrazložite svoj odgovor!

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 4. (6 bodova)

(a) Odredite sva realna rješenja sustava

$$\begin{cases} xyz = 3 \\ xy + yz + zx = -(x + y + z) - 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 25 \end{cases} .$$

(b) Odredite oblik rastava na parcijalne razlomke racionalne funkcije

$$r(x) = \frac{1}{(x+4)^2(x^2+2x+3)(x^2-1)}.$$

Nije potrebno računati konstante u brojniku.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 5. (2 + 2 + 4 + 3 = 11 bodova)

(a) Definirajte Eulerovu funkciju.

Odredite $\varphi(12^{12})$.

(b) Definirajte surjekciju.

Navedite primjer funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja je surjekcija, a nije injekcija.

(c) Iskažite i dokažite Bezoutov teorem za polinome.

(d) Definirajte kratnost nultočke polinoma.

Odredite polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ najmanjeg mogućeg stupnja kojem je 3 trostruka nultočka, te vrijedi $p(-1) = 0$ i $p(2) = 3$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (3+4=7 bodova)

- (a) Odredite ostatak pri dijeljenju broja 21122^{386} sa 7.
- (b) Neka su a, b, c prirodni brojevi i neka je $M(a, b) = M(b, c) = d$.
Dokažite da su prirodni brojevi $V\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right)$ i $\frac{b}{d}$ relativno prosti.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 2. (5 bodova) Neka je $p \in \mathbb{N}$ neparan prost broj i $n \in \mathbb{N}$. Odredite ostatak koji pri dijeljenju s p daje broj

$$1^p + 2^p + \dots + n^p$$

ako n pri dijeljenju s p daje ostatak 1.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 3. (4+2=6 bodova) Polinom $f \in \mathbb{Z}[x]$ pri dijeljenju s $x^2 - 2x$ daje ostatak $70x + 7$, a pri dijeljenju s $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ daje ostatak $x^2 + x + 1$.

- (a) Odredite ostatak pri dijeljenju f s $x^3 - 4x$.
- (b) Može li ostatak pri dijeljenju f s $x + 7$ biti 11? Obrazložite svoj odgovor!

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 4. (6 bodova)

(a) Odredite sva realna rješenja sustava

$$\begin{cases} xyz = 4 \\ xy + yz + zx = -(x + y + z) - 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -1 \end{cases} .$$

(b) Odredite oblik rastava na parcijalne razlomke racionalne funkcije

$$r(x) = \frac{1}{(x+5)^2(x^2+3x+4)(x^2-1)}.$$

Nije potrebno računati konstante u brojniku.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 5. (2 + 2 + 4 + 3 = 11 bodova)

(a) Definirajte Eulerovu funkciju.

Odredite $\varphi(20^{10})$.

(b) Definirajte injekciju.

Navedite primjer funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja je injekcija, a nije surjekcija.

(c) Iskažite i dokažite Bezoutov teorem za polinome.

(d) Definirajte kratnost nultočke polinoma.

Odredite polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ najmanjeg mogućeg stupnja kojem je -2 trostruka nultočka, te vrijedi $p(1) = 0$ i $p(-1) = 8$.