

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (2+3+2+4=11 bodova)

- (a) Neka su A , B i C proizvoljni sudovi. Koristeći istinosne tablice provjerite jesu li sudovi $A \vee (B \wedge C)$ i $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ semantički jednaki.
- (b) Što je partitivni skup? Dokažite da je za svaka dva skupa A i B inkluzija $A \subseteq B$ ekvivalentna $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
- (c) Neka je ρ relacija ekvivalencije na nepraznom skupu S . Dokažite da za sve $x, y \in S$ iz $x\rho y$ slijedi $[x] = [y]$.
- (d) Definirajte zbrajanje prirodnih brojeva. Dokažite da je $1 + m = s(m)$ za sve $m \in \mathbb{N}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 2. (3+4+3+1=11 bodova)

- (a) Dopunite i dokažite tvrdnju: Ako su $f, g : S \rightarrow S$ funkcije takve da je $f \circ g$ injekcija, onda je funkcija _____ injekcija.
- (b) Definirajte $M(a, b)$ za $a, b \in \mathbb{Z}$.
Neka su $a, b, r, k \in \mathbb{Z}$ takvi da je $kb + r = a$. Dokažite da vrijedi $M(a, b) = M(b, r)$.
- (c) Neka je $f : A \rightarrow B$ funkcija i neka su S i T podskupovi skupa A . Dokažite da vrijedi $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$. Vrijedi li obrnuta inkluzija?
- (d) Napišite Vieteove formule za polinom $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 3. (3+5+4=12 bodova) Neka je $T \subseteq \mathbb{Z}$. Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ zadana je relacija ρ_T formulom

$$A \rho_T B \quad :\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{Z})((x \in A \wedge x \in T) \Rightarrow x \in B).$$

- (a) Zapišite simbolima negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji suda $A \rho_T B$.
- (b) Ispitajte je li relacija ρ_T refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna.
- (c) Navedite primjer skupa T za koji je ρ_T relacija parcijalnog uređaja.

Rješenje.

- (a)
- Negacija: $(\exists x \in \mathbb{Z})((x \in A \wedge x \in T) \wedge x \notin B)$
 - Obrat: $(\forall x \in \mathbb{Z})(x \in B \Rightarrow (x \in A \wedge x \in T))$
 - OPK: $(\forall x \in \mathbb{Z})(x \notin B \Rightarrow (x \notin A \vee x \notin T))$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 4. (12 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 5. (12 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja $5^{5^{2023}}$ s 43.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 6. (12 bodova) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ takve da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$p'(x)^2 = 4p(x) - 3.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (2+3+2+4=11 bodova)

- (a) Neka su A , B i C proizvoljni sudovi. Koristeći istinosne tablice provjerite jesu li sudovi $(A \vee B) \wedge C$ i $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ semantički jednaki.
- (b) Što je particija skupa? Dokažite da je za svaka dva skupa A i B inkluzija $A \subseteq B$ ekvivalentna uvjetu da za svaku particiju od A postoji particija od B koja ju sadrži.
- (c) Neka je \sim relacija ekvivalencije na nepraznom skupu S . Dokažite da za sve $x, y \in S$ iz $x \not\sim y$ slijedi $[x] \cap [y] = \emptyset$.
- (d) Definirajte zbrajanje prirodnih brojeva. Dokažite da je $s(m) + n = s(m + n)$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 2. (3+4+3+1=11 bodova)

- (a) Dopunite i dokažite tvrdnju: Ako su $f, g : S \rightarrow S$ funkcije takve da je $f \circ g$ surjeksija, onda je funkcija _____ surjeksija.
- (b) Definirajte $M(a, b)$ za $a, b \in \mathbb{Z}$.
Neka su $a, b, r, k \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a = kb + r$. Dokažite da vrijedi $M(a, b) = M(b, r)$.
- (c) Neka je $f : X \rightarrow Y$ funkcija i neka su A i B podskupovi skupa X . Dokažite da vrijedi $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Vrijedi li obrnuta inkluzija?
- (d) Napišite Vieteove formule za polinom $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 3. (3+5+4=12 bodova) Neka je $S \subseteq \mathbb{Z}$. Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ zadana je relacija ρ_S formulom

$$A \rho_S B \quad :\Leftrightarrow \quad (\forall x \in \mathbb{Z})(x \in A \Rightarrow (x \in B \vee x \notin S)).$$

- (a) Zapišite simbolima negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji suda $A \rho_S B$.
- (b) Ispitajte je li relacija ρ_S refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna.
- (c) Navedite primjer skupa S za koji je ρ_S relacija parcijalnog uređaja.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 4. (12 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{4n-2}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 5. (12 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja $5^{5^{2023}}$ s 37.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Popravni kolokvij – 22. veljače 2023.

Zadatak 6. (12 bodova) Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ takve da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$p'(x)^2 = 4p(x) - 1.$$