

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (1+3+2=6 bodova) Zadana je tvrdnja:

Za svaka dva podskupa od \mathbb{N} vrijedi: ako oni nisu disjunktni, onda postoji neprazan podskup od \mathbb{N} koji je podskup od oba.

- (a) Zapišite zadanu tvrdnju simbolima.
- (b) Napišite simbolima: obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.
- (c) Odredite istinitost zadane tvrdnje, njenog obrata, negacije i obrata po kontrapoziciji. Obrazložite.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 2. (4+2=6 bodova) Neka su A , B i C proizvoljni skupovi.

(a) Odredite odnos skupova

$$(A \cup B) \Delta C \quad \text{i} \quad (A \Delta C) \cup B.$$

Inkluzije dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerom.

(b) Dokažite sljedeću tvrdnju

$$A \subseteq B \cup C \iff A \cap B^c \subseteq C.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 3. (6 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da nejednakost

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2},$$

za sve prirodne brojeve $n \geq 2$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 4. (4+2 = 6 bodova) Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirana je relacija ρ formulom

$$(a, b) \rho (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad a \mid c \wedge b \leq d.$$

- (a) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja. Je li ρ relacija ekvivalencije?
- (b) Ima li skup $\{(6, 16), (9, 12), (15, 8)\}$ donju među? Ima li infimum?

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 5. (3+2+3+3 = 11 bodova)

- (a) Definirajte relaciju ekvivalencije. Na skupu prirodnih brojeva zadana je relacija
- ρ
- s

$$a\rho b \quad \text{ako i samo ako} \quad a \text{ dijeli } b \quad \text{ili} \quad b \text{ dijeli } a.$$

Je li ρ relacija ekvivalencije? Obrazložite Vaš odgovor.

- (b) Napišite negaciju sljedeće tvrdnje:

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) ((x^2 > y) \vee (x \leq y^2)).$$

Dokažite ili opovrgnite:

$$\neg((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)) \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B).$$

- (c) Definirajte jednakost skupova. Neka su
- A, B, C, D
- skupovi takvi da vrijedi
- $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$
- . Neka je

$$L = (A \cup C) \times (B \cup D) \quad \text{i} \quad D = (A \times B) \cup (C \times D).$$

Dokažite ili opovrgnite svaku od inkluzija $L \subseteq D$, $D \subseteq L$. Vrijedi li $L = D$?

- (d) Definirajte množenje prirodnih brojeva te zatim dokažite da je ono asocijativno, tj. da za sve
- $a, b, c \in \mathbb{N}$
- vrijedi
- $(ab)c = a(bc)$
- . U dokazu smijete koristiti sva svojstva zbrajanja u
- \mathbb{N}
- te svojstvo distributivnosti množenja u odnosu na zbrajanje u skupu
- \mathbb{N}
- .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Na kolokviju nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (1+3+2=6 bodova) Zadana je tvrdnja:

Za svaka dva podskupa od \mathbb{Z} vrijedi: ako oni u uniji ne daju cijeli \mathbb{Z} , onda postoji podskup od \mathbb{Z} različit od \mathbb{Z} koji je nadskup od oba.

- (a) Zapišite zadanu tvrdnju simbolima.
- (b) Napišite simbolima: obrat, obrat po kontrapoziciji i negaciju zadane tvrdnje.
- (c) Odredite istinitost zadane tvrdnje, njenog obrata, obrata po kontrapoziciji i negacije. Obrazložite.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 2. (4+2=6 bodova) Neka su A , B i C proizvoljni skupovi.

(a) Odredite odnos skupova

$$(A \cap B) \Delta C \quad \text{i} \quad (A \Delta C) \cap B.$$

Inkluzije dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerom.

(b) Dokažite sljedeću tvrdnju

$$A \cap B \subseteq C \iff A \subseteq B^c \cup C.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 3. (6 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da nejednakost

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right) < \frac{1}{m^2},$$

za sve prirodne brojeve $m \geq 2$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 4. (4+2=6 bodova)Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirana je relacija ρ formulom

$$(a, b) \rho (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad a \leq c \wedge b \mid d.$$

- (a) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja. Je li ρ relacija ekvivalencije?
- (b) Ima li skup $\{(6, 16), (9, 12), (15, 8)\}$ donju među? Ima li infimum?

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 5. (3+2+3+3 = 11 bodova)

- (a) Definirajte relaciju parcijalnog uređaja. Na skupu prirodnih brojeva zadana je relacija ρ s

$$a\rho b \quad \text{ako i samo ako} \quad a - b = 0 \quad \text{ili} \quad a - b = 1.$$

Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite Vaš odgovor.

- (b) Napišite negaciju sljedeće tvrdnje:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) ((k^2 > n) \wedge (k \leq n)).$$

Dokažite ili opovrgnite:

$$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \equiv \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)).$$

- (c) Definirajte Kartezijev produkt dva skupa. Neka su X, Y, Z, W skupovi takvi da vrijedi $W \subseteq Z \subseteq Y \subseteq X$. Neka je

$$L = (X \cup Z) \times (Y \cup W) \quad \text{i} \quad D = (X \times Y) \cup (Z \times W).$$

Dokažite ili opovrgnite svaku od inkluzija $L \subseteq D$, $D \subseteq L$. Vrijedi li $L = D$?

- (d) Definirajte množenje prirodnih brojeva te zatim dokažite da vrijedi distributivnost množenja u odnosu na zbrajanje, tj. da za sve $a, b, c \in \mathbb{N}$ vrijedi $(a + b)c = ac + bc$. U dokazu smijete koristiti sva svojstva zbrajanja u \mathbb{N} .