

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 29. studenog 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Svaki zadatak nosi 10 bodova.

Zadatak 1.

Odredite sve $a \in \mathbf{R}$ za koje jednadžba

$$\cos(2x) + \sin(2x) = a$$

ima rješenje.

Zadatak 2.

(a) Zadana je tvrdnja:

Za svaka dva pozitivna realna broja vrijedi: ako je jedan veći od 100 i drugi manji od 50, onda je njihov omjer veći od 2.

Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Provjerite istinitost zadane tvrdnje i svih dobivenih tvrdnji. Obrazložite svoje odgovore.

(b) Koristeći tablice istinitosti, dokažite da je sud

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \iff \overline{(A \vee B)} \vee (\overline{A} \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

tautologija.

Zadatak 3.

- Dokažite da su skupovi $(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$ i $(A \triangle C) \cup (B \triangle C)$ jednaki.
- Nađite skupove A, B, C takve da su skupovi $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap C$ disjunktni i neprazni.

Zadatak 4. Na skupu $\{1, 2, \dots, 199\}$ prirodnih brojeva manjih od 200 zadana je relacija $\sim$ sa

$$m \sim n \iff \text{postoje prirodni brojevi } a \text{ i } b \text{ takvi da je } m^a = n^b.$$

Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije te odredite $[2]$ i $[4]$ (klase ekvivalencije od 2 i od 4).

Zadatak 5. Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{\log_2(\log_3(\log_5(x))) - 1}.$$

Odredite prirodnu domenu D_f i sliku $\text{Im } f$ funkcije f . Je li funkcija f injekcija? Ako jest, odredite funkciju $f^{-1} : \text{Im } f \rightarrow D_f$.