Zadatak iz Matematike 1 (14. 09. 2022.)

Os zone je pravac koji prolazi kroz ishodište i koji je paralelan smjerovima dviju mrežnih ravnina. Izračunajte kutove koje os zone određene smjerovima koji imaju Millerove indekse (201) i $(\bar{1}1\bar{1})$ zatvaraju s vektorima kristalografske baze, ako su parametri baze $a = 100\,\mathrm{pm}$, $b = 90\,\mathrm{pm}$, $c = 200\,\mathrm{pm}$, $\alpha = \gamma = 90°$, $\beta = 95°$.

Rješenje. Os zone je paralelna nekoj ravnini točno ako je okomita na njezinu normalu. Stoga je vektor smjera $[u, v, w]$ osi zone paralelne smjerovima (201) i $(\bar{1}1\bar{1})$ okomit na njihove vektore normala $[2, 0, 1]^*$ i $[-1, 1, -1]^*$, dakle se za $[u, v, w]$ može uzeti vektorski produkt $[2, 0, 1]^*$ i $[-1, 1, -1]^*$. Budući da je recipročna baza recipročne baze ponovno direktna baza, imamo

$$[u, v, w] = [2, 0, 1]^* \times [-1, 1, -1]^* = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c} = [-1, 1, 2].$$

Sad treba odrediti kutove koje vektor $\overrightarrow{n} = [-1, 1, 2]$ zatvara s vektorima $\overrightarrow{a} = [1, 0, 0]$ (kut ϕ), $\overrightarrow{b} = [0, 1, 0]$ (kut θ) i $\overrightarrow{c} = [0, 0, 1]$ (kut ψ):

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a}}{n\,a} = \frac{(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a}}{a\sqrt{(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}) \cdot (-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c})}} =$$

(prema zadanim parametrima, $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ pa je $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 0$)

$$= \frac{-a^2 + 2ac\cos\beta}{a\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2 - 4ac\cos\beta}} = -0{,}313487\ldots \Rightarrow \varphi = 108°18'.$$

Analogno se dobije da je $\theta = 77°55'$ i $\psi = 18°11'$

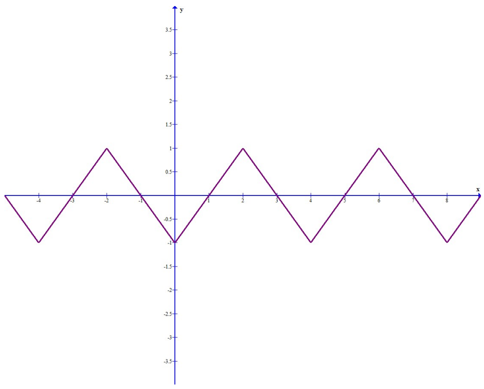
Zadatak iz Matematike 2 (14. 09. 2022.)

Realna funkcija jedne varijable je zadana formulom

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \le x \le 2 \\ 3-x, & 2 < x \le 4 \end{cases}.$$

Ta je funkcija prvo proširena do parne funkcije na segmenut $[-4, 4]$, a zatim po periodičnosti proširena na cijeli skup $\mathbf{R}$. Skicirajte graf te funkcije i odredite njenu najbolju aproksimaciju s 4 člana Fourierovog razvoja.

Rješenje. Graf funkcije prikazan je na slici dolje.



Budući da je funkcija parna, svi Fourierovi koeficijenti uz sinuse bit će 0: $B_n = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Temeljni period funkcije je 4, pa je $L = 2$ i $\omega_n = \frac{n\pi}{2}$. Stoga je

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos(\omega_0 x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{2}(x-1)\mathrm{d}x = 0;$$

$$A_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos(\omega_n x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{2}(x-1))\cos(\omega_n x)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2(-2+2\cos(n\pi)+n\pi\sin(n\pi))}{n^2\pi^2} = \frac{4\cdot(-1)^n-4}{n^2\pi^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, Fourierov ref zadane funkcije je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)^n-4}{n^2\pi^2}\cos(\omega_n x).$$

Za odabir najbolje aproksimacije treba nam spektar amplituda. Budući da je funkcija f realna i parna, svi njezini kompleksni Fourierovi koeficijenti su realni:

$$c_n = \frac{A_n}{2} = \frac{2\cdot(-1)^n-2}{n^2\pi^2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Budući da je za parne n $(-1)^n = 1$, vidimo da su svi (realni kao i kompleksni) Fourierovi koeficijenti parnog indeksa nula. Za neparni n je

$$|c_n| = \left|\frac{-4}{n^2\pi^2}\right| = \frac{4}{n^2\pi^2},$$

što očito pada s porastom apsolutne vrijednosti cijelog broja n. Budući da su u ovom slučaju $A_n = c_{\pm n}$, vidimo da će najznačajniji članovi u realnom Fourierovom redu biti oni s $n = 1$, 3, 5 i 7, dakle tražena aproksimacija je

$$-\frac{8}{\pi^2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{9}\cos(\frac{3\pi}{2}x) + \frac{1}{25}\cos(\frac{25\pi}{2}x) + \frac{1}{49}\cos(\frac{49\pi}{2}x)\right).$$