

UVOD U MATEMATIKU

Drugi ispit – 21. veljače 2025.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Svaki zadatak nosi 20 bodova.

Zadatak 1. Neka je $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_2(x^3+1)}}$. Odredite prirodnu domenu i sliku ove funkcije. Ako je f injekcija, odredite njen inverz.

Zadatak 2. Na skupu cijelih brojeva zadana je relacija ρ na sljedeći način:

$$m \rho n \iff |m - n| < 7 \text{ i } 7 \mid m \cdot n.$$

- (a) Odredite je li ρ simetrična, tranzitivna, refleksivna, antisimetrična. Ako relacija zadovoljava neko od svojstava dokažite, a ako ne zadovoljava opovrgnite protuprimjerom.
- (b) Odredite sve cijele brojeve n za koje vrijedi $n \rho 0$, te sve cijele brojeve m za koje vrijedi $1 \rho m$.

Zadatak 3.

- (a) Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi $2 \geq \sqrt[n]{n+2}$
- (b) Neka je $a_1 = 1$ i za svaki prirodan broj $n \geq 1$ definiramo $a_{n+1} = \sqrt[n]{n+a_n}$. Dokažite da je $a_n \leq 2$ za svaki prirodan broj n .

Zadatak 4.

- (a) Dokažite da se razlomak $\frac{21n+10}{6n+3}$ ne može skratiti ni za koji prirodan broj n .
- (b) Odredite sve polinome $f(x)$ s realnim koeficijentima za koje vrijedi

$$f(x^4 + 1) = x^4 f(x^2) + 5.$$

Zadatak 5.

- (a) Odredite ostatak koji broj $21^{(2025^3)}$ daje pri dijeljenju sa 13.
- (b) Odredite ostatak koji polinom $x^{100} + x + 1$ daje pri dijeljenju s $(x-1)^2$.

Napomena. Usmeni ispiti za studente prof. Ilišević održat će se u ponedjeljak 24.2.