

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.

Zadatak 1. (5 bodova) Neka je f holomorfna funkcija na $K(0, 3)$, te $g(z) = ze^{f(z)}$. Dokažite da funkcija $|g|$ na $K(2i, 1)$ ne postiže ni maksimum ni minimum. Postiže li funkcija $|g|$ maksimum ili minimum na $K(0, 1)$?

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 2. (5 bodova) Zadana je funkcija

$$f(z) = e^z - e^i \frac{\cos(i - z)}{(i - z)^2}.$$

Označimo sa z_0 singularitet funkcije f .

- (a) Odredite Laurentov razvoj funkcije f u z_0 u obliku $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.
- (b) Koristeći razvoj u Laurentov red, odredite reziduum funkcije f u točki z_0 .

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 3. (5 bodova) Pomoću teorema o reziduumima odredite vrijednost integrala

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2 - (1+i)z + \frac{i}{2}) \cdot \sin z},$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica $S(0, 2)$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 4. (5 bodova) Odredite broj nultočki funkcije

$$f(z) = z^4 - 4z - 1$$

koje se nalaze

- (a) unutar kruga $K(0, 1)$
- (b) unutar vijenca $V(0; 1, 2)$

uzimajući u obzir njihove kratnosti.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 5. (5 bodova) Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx.$$

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.

Zadatak 1. (5 bodova) Neka je f cijela funkcija takva da je $f(2z) = f(z)$ za svaki $z \in \mathbb{C}$. Koristeći Princip jedinstvenosti za holomorfne funkcije, dokažite da je f konstanta.

Rješenje.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 2. (5 bodova) Neka je $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zadana s:

$$f(z) = \frac{1}{z - 3i} \sin \frac{1}{iz + 3} + \cos \frac{1}{3i - z}.$$

Koristeći razvoj u Laurentov red, odredite reziduume funkcije f u njezinim singularitetima.

Rješenje. $\text{Res}(f, 3i) = 0 + 0 = 0$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 3. (5 bodova) Pomoću teorema o reziduumima odredite vrijednost integrala

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{(z^2 + 1) \sin(i\pi z)} dz,$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica oko $1 - i$ radijusa 2.

Rješenje.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 4. (5 bodova) Odredite broj rješenja jednadžbe

$$e^z = 7z^2 - z + 1$$

unutar vijenca $V(0; 1, 2)$.

Rješenje. Tražimo broj nultočaka funkcije $p(z) = -e^z + 7z^2 - z + 1$. Neka je $f(z) = 7z^2$ i $g(z) = -e^z - z + 1$. Očito je $p(z) = f(z) + g(z)$.

Prvo nađimo broj nultočaka unutar $K(0, 1)$. Kako je za $|z| = 1$ $|f(z)| = 7$ i $|g(z)| \leq e + 1 + 1 < 7$, po Rouchéovom teoremu zaključujemo da p unutar kružnice $K(0, 1)$ ima jednako nultočaka kad i f - točno 2.

Sada nađimo broj nultočaka unutar $K(0, 2)$. Kako je za $|z| = 1$ $|f(z)| = 28$ i $|g(z)| \leq e^2 + 2 + 1 < 28$, po Rouchéovom teoremu zaključujemo da p unutar kružnice $K(0, 2)$ ima jednako nultočaka kad i f - točno 2.

Dakle, p nema nijednu nultočku unutar vijenca $V(0; 1, 2)$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 23. lipnja 2023.

Zadatak 5. (5 bodova) Koristeći teorem o reziduuumima izračunajte glavnu vrijednost integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin x \cos x}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Rješenje. Uočimo najprije formulu za dvostruki kut sinusa u brojniku. Dakle, računamo integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2 + 1)} dx.$$

Stavimo $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+1)}$ i $F(z) = f(z)e^{2iz}$. Uočimo da su singulariteti $\pm i$ i 0 , svi su polovi prvog reda, a nas zanimaju samo i i 0 .

Nadalje, imamo

$$M(R) = \max_{|z|=R} \left| \frac{1}{z(z^2 + 1)} \right| \leq \frac{1}{|z|(|z|^2 - 1)} = \frac{1}{|R(R^2 - 1)|} \rightarrow 0$$

kada $R \rightarrow \infty$. Po Jordanovoj lemi, vrijedi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) dz = 0$$

Preostaje izračunati reziduume.

$$\text{res}(F, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)F(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{2iz}}{z(z + i)} = \frac{-e^{-2}}{2}$$

$$\text{res}(F, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} zF(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{e^{3iz}}{(z^2 + 1)} = 1$$

Napokon, koristeći teorem o reziduuumima i činjenicu da je podintegralna funkcija parna, dobivamo

$$I = \text{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{-e^{-2}}{2} + \pi i \right) = \text{Im} (\pi i - \pi i e^{-2}) = \pi - \frac{\pi}{e^2}$$