JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također potpišite. Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim kalkulatora.

1. (16 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = xy^2$ na jediničnom krugu

$$K(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

2. Neka je $F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos(xy) \\ xy\cos(xy) + \sin(xy) \end{pmatrix}$.

   (a) (10 bodova) Da li je F potencijalno vektorsko polje, tj. da li postoji funkcija f takva da vrijedi $F = \nabla f$? Ukoliko postoji, odredite funkciju f.

   (b) (8 bodova) Izračunajte:

   $$\int_c F \cdot ds = \int_c y^2\cos(xy)dx + (xy\cos(xy) + \sin(xy))dy,$$

   gdje je $c(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

3. (a) (8 bodova) Neka je Ω područje omeđeno parabolom $y = x^2$ i pravcem $x + y = 2$. Izračunajte:

$$\int\int_{\Omega} xy\ dxdy.$$

(b) (8 bodova) Koristeći Greenov teorem izračunajte integral vektorskog polja $F(x,y) = (-x^2y + \sin x,\ xy^2)$ duž krivulje $S(t) = (\sin t,\ \cos t), \quad t \in [0,1]$, tj. $\int_S F dS$.

Ili, ekvivalentno, koristeći Greenov teorem izračunaj:

$$\int_c (-x^2y + \sin(x))dx + xy^2dy,$$

gdje je c pozitivno orijentirana jedinična kružnica.

$4a$	$4b$	$4c$	$5a$	$5b$	$6a$	$6b$

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

4. (a) (8 bodova) Tijelo T ograničeno je odozgo s paraboloidom $z = 4 - x^2 - y^2$ a odozdo s paraboličkim cilindrom $z = 2 + y^2$. Izvedite formulu za volumen tijela T pomoću uzastopnih jednostrukih integrala. Nije potrebno računati integrale.
   (b) (4 boda) Izračunajte cilindrične koordinate točke $(1, 1, 1)$.
   (c) (4 boda) Izračunajte pravokutne koordinate točke sa sferičkim koordinatama $(2, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.

5. (a) (8 bodova) Neka je $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ neprekidna funkcija, C glatka krivulja, $r : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija krivulje C. Neka je $\phi : [c, d] \to [a, b]$ takva da je ϕ' pozitivna i neprekidna funkcija na $[c, d]$. Dokažite da je krivuljni integral funcije F na C s parametrizacijom r jednak krivuljnom integralu funcije F na C s parametrizacijom $R(w) = r(\phi(w))$, $w \in [c, d]$.
   (b) (8 bodova) Izvedite formulu za površinu plohe S dobijene rotacijom grafa funkcije $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ oko osi x.

6. (a) (12 bodova) Izračunaj plošni integral:

$$\iint_S (x^2 + y^2) d\,\sigma$$

   gdje je S gornja hemisfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
   (b) (6 bodova) Izračunajte divergenciju i rotaciju funkcije

$$v(x, y, z) = x^2 y\vec{i} + y^2 z\vec{j} + xy^2\vec{k}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također potpišite. Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim kalkulatora.

1. (16 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^2y$ na jediničnom krugu

$$K(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

2. Neka je $F(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ -x^2\sin(xy) \end{pmatrix}$.

   (a) (10 bodova) Da li je F potencijalno vektorsko polje, tj. da li postoji funkcija f takva da vrijedi $F = \nabla f$? Ukoliko postoji, odredite funkciju f.

   (b) (8 bodova) Izračunajte:

$$\int_c F \cdot ds = \int_c (\cos(xy) - xy\sin(xy))dx - x^2\sin(xy)dy,$$

   gdje je $c(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [0, \pi]$.

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

3. (a) (8 bodova) Neka je Ω područje omeđeno parabolom $y = x^2$ i pravcem $-x + y = 2$. Izračunajte:

$$\int\int_{\Omega} xy \, dxdy.$$

(b) (8 bodova) Koristeći Greenov teorem izračunajte integral vektorskog polja $F(x, y) = (-x^2 y, xy^2 + \cos y)$ duž krivulje $S(t) = (\sin t, \ \cos t), \quad t \in [0, 1]$, tj. $\int_S F dS$.

Ili, ekvivalentno, koristeći Greenov teorem izračunaj:

$$\int_c -x^2 y dx + (xy^2 + \cos(y)) dy,$$

gdje je c pozitivno orijentirana jedinična kružnica.

4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 14.01.2013.

4. (a) (8 bodova) Tijelo T ograničeno je s eliptičkim paraboloidima $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ i $z = 3x^2 + \frac{1}{4}y^2$. Izvedite formulu za volumen tijela T pomoću uzastopnih jednostrukih integrala. Nije potrebno računati integrale.
   (b) (4 boda) Izračunajte cilindrične koordinate točke $(3, 4, 2)$.
   (c) (4 boda) Izračunajte pravokutne koordinate točke sa sferičkim koordinatama $(3, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$.

5. (a) (8 bodova) Neka je C glatka krivulja s početkom u točki A i krajem u točki B. Neka je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija na otvorenom skupu koji sadrži C. Dokažite da tada vrijedi

$$\int_C \nabla f(r) d\,r = f(A) - f(B).$$

   (b) (8 bodova) Izvedite formulu za površinu plohe S zadane kao graf funkcije $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$.

6. (a) (12 bodova) Izračunaj plošni integral:

$$\iint_S (x^2 + y^2) d\,\sigma$$

   gdje je S dio parabole $z = 1 - x^2 - y^2$ koji leži iznad xy ravnine.
   (b) (6 bodova) Izračunajte divergenciju i rotaciju funkcije $v(x, y, z) = e^{y^2}\vec{i} + e^{z^2}\vec{j} + e^{x^2}\vec{k}$.