1a	1b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također potpišite. Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 - xy + x + y^2 + y - 3$.
   (b) (8 bodova) Odredite maksimum funkcije $f(x, y) = x^2 + y$ na $x^2 + 4y^2 \leq 4$.

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

2. (a) (8 bodova) Izračunajte integral:

$$\int\int_{\Omega} xy^2 dxdy,$$

gdje je Ω trokut određen sa točkama $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$.

(b) (10 bodova) Izračunajte integral:

$$\int\int\int_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$$

gdje je $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

3. (a) (8 bodova) Pokažite da je integral

$$\int_\gamma \left(2xy\cos(x^2y) + y - 2x^2\right) dx + \left(x^2\cos(x^2y) + x - y\right) dy$$

neovisan o putu integracije i odredite njegovu vrijednost ako je γ glatka krivulja koja spaja točke $(0,0)$ i $(1,1)$

(b) (8 bodova) Neka je γ zatvorena glatka krivulja orijentirana u pozitivnom smjeru. Pokažite da je integral

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (-y + x^2)dx + (x+y)dy,$$

jednak površini područja koje γ omeđuje.

$4a$	$4b$	$5a$	$5b$	$5c$	6

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

4. (10 bodova) Neka je (a, b) lokalni ekstrem glatke funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dokažite da je tada tangencijalna ravnina plohe $z = f(x, y)$ u točki $(a, b, f(a, b))$ paralelna s xy–ravninom.

5. (a) (5 bodova) Skicirajte područje Ω definirano uzastopnim integralima

$$\int_1^2 \int_0^{\ln y} f(x, y)\, dx\, dy$$

i promijenite poredak integracije.

(b) (15 bodova) Skicirajte i opišite područje integracije za integral

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

te promijenite redoslijed integriranja u $dy\, dx\, dz$.

6. (a) (10 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ glatka funkcija, C glatka krivulja. Sa $-C$ označimo krivulju koja ima suprotnu orijentaciju od krivulje C. Dokažite da vrijedi

$$\int_{-C} f(r)\, dr = -\int_C f(r)\, dr.$$

(b) (10 bodova) Nađite formule za koordinate težišta skupa u $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ pomoću krivuljnih integrala po rubu od Ω. Pretpostavljamo da je rub po dijelovima glatka zatvorena krivulja.

$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također potpišite. Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 3y + 3$.
   (b) (8 bodova) Odredite maksimum funkcije $f(x, y) = x + y^2$ na $4x^2 + y^2 \leq 4$.

$2a$	$2b$

JMBAG　　　　IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

2. (a) (8 bodova) Izračunajte integral:

$$\int\int_{\Omega} xy^2 dxdy,$$

gdje je Ω trokut određen sa točkama $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$.

(b) (10 bodova) Izračunajte integral:

$$\int\int\int_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2} dxdydz,$$

gdje je $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\}$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

3. (a) (8 bodova) Pokažite da je integral

$$\int_\gamma \left(e^{x+y^2} + y + x\right) dx + \left(2ye^{x+y^2} + x + 2y^2\right) dy$$

neovisan o putu integracije i izračunajte ga ako je γ glatka krivulja koja spaja točke $(0,0)$ i $(1,1)$

(b) (8 bodova) Pomoću Greenovog teorema izračunajte integral

$$\int_\gamma -y^3 dx + x^3 dy,$$

gdje je γ jedinična kružnica orijentirana u pozitivnom smjeru.

4a	4b	5a	5b	5c	6

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 27.1.2014.

4. (10 bodova) Neka funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem u (x_0, y_0) i neka $\nabla f(x_0, y_0)$ postoji. Dokažite da tada vrijedi $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

5. (a) (5 bodova) Skicirajte područje Ω definirano uzastopnim integralima

$$\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx\,dy$$

i promijenite poredak integracije.

(b) (15 bodova) Dokažite

$$\int_a^b \int_a^z \int_a^y f(x)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \frac{(b-x)^2}{2} f(x)\,dx.$$

6. (a) (10 bodova) Neka je Ω Jordanovo područje a C rub od Ω koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja. Dokažite da se tada površina od Ω može izračunati po formuli

$$\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy.$$

(b) (10 bodova) Dokažite: Ako je $f(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ gradijent neke fukcije, onda vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$