$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Ispitaj tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + (x+1)y^2 - 3x^2.$$

   (b) (9 bodova) Na skupu $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ odredi maksimum funkcije $f(x,y) = x + y$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

2. (a) (8 bodova) Izračunajte integral

$$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{x}} y \ln(x^2) dy dx.$$

(b) (8 bodova) Izračunajte integral

$$\iint\limits_{\Omega} (3-y) dx dy,$$

gdje je $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$.

3a	3b

JMBAG ______ IME I PREZIME ______

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

3. (a) (8 bodova) Pokažite da je integral

$$\int_\gamma (2xye^{x^2y} + 1)\mathrm{d}x \, + (x^2 e^{x^2 y})\mathrm{d}y$$

neovisan o putu integracije i odredite njegovu vrijednost ako je γ glatka krivulja koja spaja točke $(1, \ln 2)$ i $(2, 1/2)$.

(b) (9 bodova) Koristeći Greenov teorem izračunajte

$$\int_c -y \, \mathrm{d}x \, + 2y^2 \, \mathrm{d}y \, ,$$

gdje je c rub skupa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x - 2 \leq y \leq -x\}$ orijentiran u pozitivnom smjeru.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

4. (9 bodova) Neka su dane funkcije $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dokažite formulu

$$\nabla \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{g(x,y)\nabla f(x,y) - f(x,y)\nabla g(x,y)}{g^2(x,y)}.$$

5. (9 bodova) Zadana je funkcija $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$, gdje je k konstanta.
   (a) Dokažite da je $(0,0)$ stacionarna točka neovisno o vrijednosti konstante k.
   (b) Za koje vrijednosti od k (ako takve postoje) je $(0,0)$ sedlasta točka?
   (c) Za koje vrijednosti od k (ako takve postoje) je $(0,0)$ točka lokalnog minimuma?

6. (9 bodova) Skicirajte područje Ω definirano uzastopnim integralima

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

i promijenite poredak integracije.

7. (9 bodova) Neka je T tijelo volumena

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Napišite formulu za volumen V u obliku

$$V = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_\square^\square \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

8. (5 bodova) Izračunajte cilindričke koordinate točaka $(0,1,2)$ i $(0,-1,2)$.

9. (9 bodova) Neka je $C : \vec{r} = \vec{r}(u)$, $u \in [a,b]$ glatka krivulja i $\vec{q}$ fiksiran vektor. Dokažite da vrijedi

$$\int_C \vec{q}\,\mathrm{d}\vec{r} = \vec{q} \cdot (\vec{r}(b) - \vec{r}(a)).$$

Uputa za studente prof. Marušića–Paloke: Ovdje je $\vec{r}$ jedna glatka parametrizacija krivulje C, a $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ označava krivuljni integral druge vrste po krivulji C.

$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Ispitaj tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = -y^3 - (y + 1)x^2 + 3y^2.$$

   (b) (9 bodova) Na skupu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 \leq 1\}$ odredi maksimum funkcije $f(x, y) = -x - y$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

2. (a) (8 bodova) Izračunajte integral

$$\int_1^3 \int_0^{\sqrt{y}} x \ln(y^2) dx dy.$$

(b) (8 bodova) Izračunajte integral

$$\iint\limits_{\Omega} (2-x) dx dy,$$

gdje je $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 9\}$.

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

3. (a) (8 bodova) Pokažite da je integral

$$\int_\gamma (xye^{xy} + e^{xy})\mathrm{d}x + (x^2 e^{xy} - 1)\mathrm{d}y$$

neovisan o putu integracije i odredite njegovu vrijednost ako je γ glatka krivulja koja spaja točke $(1, -1)$ i $(0, 2)$.

(b) (9 bodova) Koristeći Greenov teorem izračunajte

$$\int_c x^2 \,\mathrm{d}x + xy \,\mathrm{d}y\,,$$

gdje je c rub skupa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y - 2 \leq x \leq -y^2\}$ orijentiran u pozitivnom smjeru.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 6.2.2015.

4. (9 bodova) Neka je dana funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ te prirodan broj n. Dokažite formulu

$$\nabla f^n(x,y) = n f^{n-1}(x,y)\nabla f(x,y).$$

5. (9 bodova) Zadana je funkcija $f(x,y) = x^2 + kxy + 4y^2$, gdje je k konstanta.
   (a) Dokažite da je $(0,0)$ stacionarna točka neovisno o vrijednosti konstante k.
   (b) Za koje vrijednosti od k (ako takve postoje) test s parcijalnim derivacijama drugog reda ne daje odgovor na pitanje da li je $(0,0)$ lokalni ekstrem ili ne?
   (c) Za koje vrijednosti od k (ako takve postoje) je $(0,0)$ točka lokalnog maksimuma?

6. (9 bodova) Skicirajte područje Ω definirano uzastopnim integralima

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

i promijenite poredak integracije.

7. (9 bodova) Neka je T tijelo volumena

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Napišite formulu za volumen V u obliku

$$V = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_\square^\square \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

8. (5 bodova) Izračunajte sferičke koordinate točaka $(0,3,4)$ i $(0,-3,4)$.

9. (9 bodova) Neka je $C : \vec{r} = \vec{r}(u)$, $u \in [a,b]$ glatka krivulja. Dokažite da vrijedi

$$\int_C \vec{r}\,\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\|\vec{r}(b)\|^2 - \|\vec{r}(a)\|^2}{2}.$$

Uputa za studente prof. Marušića–Paloke: Ovdje je $\vec{r}$ jedna glatka parametrizacija krivulje C, a $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ označava krivuljni integral druge vrste po krivulji C.