JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Napomene: Odmah potpišite sve listove koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja. Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

Zadatak 1. (18 bodova)

(a) (9 bodova) Za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-3)^{n+1}}{n^{-1}} x^n$$

odredite radijus konvergencije r i odredite konvergira li red za $x=-r$.

(b) (9 bodova) Odredite aproksimaciju integrala s greškom manjom od 10^{-2}

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$$

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Zadatak 2. (16 bodova)

(a) (8 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = e^x \cos y$ na trokutu omeđenom pravcem $x + y = -\pi$ i koordinatnim osima.

(b) (8 bodova) Odredite minimalno oplošje kvadra volumena 8 kojemu duljina svake stranice iznosi najviše 4.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Zadatak 3. (16 bodova) Izračunajte $\iiint_\Omega \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ gdje je

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2+y^2, x^2+y^2+z^2 \leq 2\}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Zadatak 4. (10 bodova) Temperatura $T(x,y,z)$ u svakoj točki $S(x,y,z)$ tijela

$$K = \{(x,y,z)\ ;\ 0 \leq z \leq 2\ ,\ x^2 + y^2 \leq 2x\ \}$$

proporcionalna je kvadratu udaljenosti od ishodišta $O(0,0,0)$ do točke S. Konstanta proporcionalnosti ista je za sve točke $S \in K$. Prosječna temperatura tijela K računa se formulom

$$\overline{T} = \frac{1}{\text{volumen}(K)} \iiint_K T(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

i iznosi 10 Celsiusa. Izračunajte temperaturu u točki $P\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Zadatak 5. (10 bodova) Izračunajte

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2}\, dy\, dx \quad .$$

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Zadatak 6. (10 bodova) Neka je f funkcija klase C^2 na $\mathbf{R}^2$ te neka zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x.y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

u svakoj točki $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Pokažite da za svaku po dijelovima glatku zatvorenu krivulju Γ vrijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx - \frac{\partial f}{\partial x}\, dy = 0$$

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Zadatak 7. (10 bodova) Neka je Γ krivulja zadana u polarnim koordinatama jednadžbom $r = H(\varphi)$, gdje je $H : [\alpha, \beta] \to [0, +\infty\rangle$ funkcija klase C^1 te $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Pokažite da je duljina krivulje Γ dana formulom

$$\ell(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{H(\varphi)^2 + H'(\varphi)^2}\, d\varphi \quad .$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi ispit – 12. 2. 2025.

Zadatak 8. (10 bodova) Provjerite konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\ \cos n\pi}{n^2+25} \ .$$