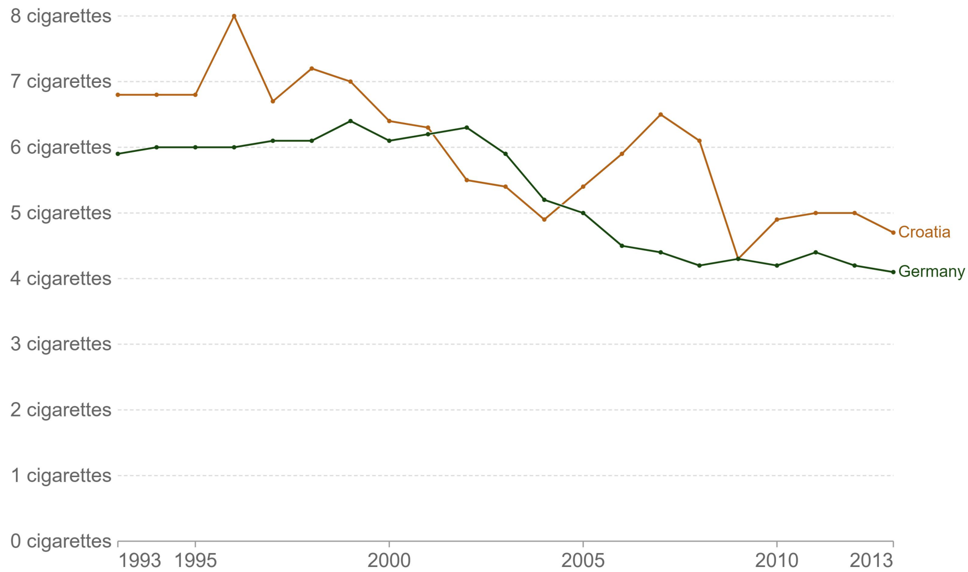
Riješeni peti zadaci iz Matematike 1 i 2 s roka 21. 6. 2022.

Matematika 1: Na slici dolje prikazani su grafovi ovisnosti prosjenog dnevnog broja ν kupljenih cigareta po jednoj odrasloj osobi u Njemakoj (Germany) i Hrvatskoj (Croatia) u ovisnosti o vremenu t (u razdoblju od 1993. do 2013. godine). Iako se podaci biljee samo jednom godinje, s obzirom na to da se radi o *dnevnim* prosjenim brojevima kroz 11 godina, razumno je diskretnu ovisnost aproksimirati kontinuiranom (neprekidnom), tj. pretpostaviti da grafovi kako su prikazani dobro reprezentiraju ovisnost $\nu(t)$. Znajući kako se određuje prosječna vrijednost kontinuirane zavisne varijable za određeni raspon zavisne varijable, te koristeći dane grafove, što točije izračunajte prosječne vrijednosti od ν kroz navedeno razdoblje za Njemačku i Hrvatsku. Za sve izračune koje niste u mogućnosti provesti egzaktno, obvezno napišite argument zašto koristite svoje aproksimacije. Rješenja iz kojih nije vidljiv postupak se ne priznaju.



Rješenje. Znamo da se prosječna vrijednost kontinuirane zavisne varijable ν za raspon nezavisne varijable $a \leq t \leq b$ određuje kao

$$\overline{\nu} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \nu(t)\mathrm{d}t.$$

Raspon vremena je isti i za Njemačku i za Hrvatsku: $b-a = 2013-1993 = 20$ godina. Očito je ν u oba slučaja nenegativna neprekidna funkcija vremena pa je $\int_{1993.\ \mathrm{g.}}^{2013.\ \mathrm{g.}} \nu(t)\mathrm{d}t$ u oba slučaja jednak površini između odgovarajućeg grafa i osi apscisa, za dani vremenski raspon. Budući da su oba grafa po dijelovima afini, površine se dadu lako dobiti kao zbroj površina pravokutnika koji su širine po 1 (godine) i visina ν_i do pola visine (prosjeka) vrijednosti ν na početku i kraju te godine. Primjerice, za Njemačku očitavanjem vrijednosti ν s grafa dobijemo:

i	t/g.	ν	ν_i
0	1993	5,9	–
1	1994	6	5,95
2	1995	6	6
3	1996	6	6
4	1997	6,1	6,05
5	1998	6,1	6,1
6	1999	6,4	6,25
7	2000	6,1	6,25
8	2001	6,2	6,15
9	2002	6,3	6,25
10	2003	5,9	6,1
11	2004	5,2	5,55
12	2005	5	5,1
13	2006	4,5	4,75
14	2007	4,4	4,45
15	2008	4,2	4,3
16	2009	4,3	4,25
17	2010	4,2	4,25
18	2011	4,4	4,3
19	2012	4,2	4,3
20	2013	4,1	4,5
$\sum$			106,85

Dakle, za Njemačku je prosjek ν približno

$$\frac{1}{20\,\text{g.}} \cdot 106{,}85\,\text{g.} = 5{,}3425 \approx 5{,}3$$

cigareta (prosječno dnevno po osobi). Za Hrvatsku bi postupak bio analogan, a s obzirom da je gotovo svuda graf za Hrvatsku iznad grafa za Njemačku, očito će se dobiti nešto veći prosjek ν.

Matematika 2: Poetkom 17. stoljea, škotski plemić i hobi-matematičar John Napier konstuirao je prvu tablicu „logaritama”. Napierova definicija „logaritma” može se opisati ovako: Dvije čestice A i G gibaju se pravocrtno i obje iz poetnih toaka kreu u istom trenutku. estica A se giba jednoliko, brzinom iznosa 10^7 m/s. estica G se giba od poetne toke prema konanoj toki, koje su razmaknute 10^7 m, poetna brzina joj je 10^7 m/s i u svakom trenutku joj je brzina razmjerna trenutnoj udaljenosti do cilja. Napier definira: Udaljenost koju je do nekog trenutka prela estica A je „logaritam” udaljenosti koja je estici G u istom trenutku preostala do cilja. Ako Napierov „logaritam” označimo s NapLog, izvedite formulu funkcije $y = \operatorname{NapLog} x$, skicirajte ju i nađite bar dva svojstva koja su kod modernih logaritama različita u odnosu na NapLog.

Rješenje. Neka je y_t udaljenost koju je do trenutka t prešla čestica A, a x_t udaljenost koju u tom trenutku još treba prijeći čestica G. Tada je $y = \frac{y_t}{\mathrm{m.}} = \operatorname{NapLog}\frac{x_t}{\mathrm{m}}$. Prema opisu gibanja čestice G, vrijedi

$$k\,x_t = v_t = \frac{\mathrm{d}(10^7 - x_t)}{\mathrm{d}t} = -\dot{x}_t \Rightarrow$$

$$-\dot{x} = k\,x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = -k\mathrm{d}t \Rightarrow \ln x = -k\,t + C_1 \Rightarrow x_t = C\,\exp(-kt).$$

Zbog $x_0 = 10^7\,\mathrm{m}$ dobijemo $C = 10^7\,\mathrm{m}$, dakle $x_t = 10^7\,\mathrm{m}\exp(-k\,t)$. Deriviramo li to po t, dobit ćemo $v_t = -10^7 k\exp(-k\,t)$. Zbog $v_0 = 10^7$ m/s sad slijedi $k = 1$. Dakle, $x_t = 10^7\exp(-t)$, odnosno $t = \ln\frac{10^7}{x_t}$. S druge je strane, zbog jednolikog gibanja čestice A, $y_t = 10^7 t$ m/s. Po definiciji je

$$\operatorname{NapLog}(x) = y = 10^7 t = 10^7 \ln\frac{10^7}{x}.$$

Vidimo da za razliku od modernog logaritma, Napierov logaritam nema nultočku 1, nego 10^7. Također, $\operatorname{NapLog}(a\,b) = 10^7\ln\frac{10^7}{a\,b} = 10^7\ln\frac{10^7}{a} + 10^7\ln\frac{10^7}{10^7 b} = \operatorname{NapLog}(a) + \operatorname{NapLog}(10^7 b) \neq \operatorname{NapLog}(a) + \operatorname{NapLog}(b)$.