LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 31. siječnja 2025.

ZADATAK 1

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (6 bodova) Koristeći elementarne transformacije nad retcima, izračunajte A^{-1}.

(b) (4 boda) Izračunajte inverz matrice $F_{12}A$ te matrice $F_{23}^{\frac{1}{2}}A$.

Rješenje.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & : & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & -1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$(F_{12}A)^{-1} = A^{-1}(F_{12})^{-1} = A^{-1}F_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(F_{23}^{\frac{1}{2}}A)^{-1} = A^{-1}(F_{23}^{\frac{1}{2}})^{-1} = A^{-1}F_{23}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 2 & -1 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{ZADATAK 2}}$

(a) (3 boda) Odredite nepoznanicu x u matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ ako je poznato da je A ekvivalentna matrici $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) (4 boda) Dane su $A, B \in M_n$ te matrica $C \in M_{n,2n}$ u blok zapisu $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$. Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom

(b1) $r(A) = n \implies r(C) = n$

(b2) $r(A) < n \implies r(C) < n$.

(c) (3 boda) Neka su $A, B \in M_{mn}$ proizvoljne. Pokažite da je $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Rješenje.

(a) Kako je $\{R_1^B, R_2^B\}$ očito linearno nezavisan skup, te je $R_3^B = 2R_1 - R_2^B$, vidimo da je $r(B) = 2$. S obzirom da su matrice ekvivalentne ako i samo ako su istog ranga, potrebno je odrediti x takav da je $r(A) = 2$. Standardnim načinom se dobije da je

$$r(A) = \begin{cases} 2, & x = 3 \\ 3, & x \neq 3 \end{cases},$$

pa zaključujemo da mora biti $x = 3$.

(b1) Ukoliko je $r(A) = n$, slijedi da stupci matrice A čine linearno nezavisan skup. Posebno, kako su oni ujedno i stupci matrice C, slijedi da je $r(C) \geq n$. S druge strane, zbog dimenzija je očito i $r(C) \leq n$, odakle slijedi $r(C) = n$.

(b2) Implikacija ne vrijedi: možemo uzeti $A = 0, B = I_n$; u tom slučaju je $r(A) = 0 < n$ no $r(C) = n$.

(c) Kako za stupce matrice $A + B$ očito imamo $S_j^{A+B} = S_j^A + S_j^B$, $j = 1, \dots, n$, imamo

$$\{S_1^{A+B}, \dots, S_n^{A+B}\} \subseteq [\{S_1^A, \dots, S_n^A, S_1^B, \dots, S_n^B\}] = [\{S_1^A, \dots, S_n^A\}] + [\{S_1^B, \dots, S_n^B\}].$$

Uzimanjem linearne ljuske u prethodnoj inkluziji te promatranjem dimenzija odmah slijedi tražena nejednakost.

ZADATAK 3

(a) (6 bodova) Izračunajte determinantu matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ dane s

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i+j = n+1, \\ j, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) (4 boda) Neka su $A, B \in M_n$ regularne. Pokažite da je $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.

Rješenje:

(a) Računamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 1 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{stupcu}}}{\overset{\substack{\text{I. stupac } \cdot(-j) \\ \text{dodamo } j\text{-tom}}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(n-1) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -(n-3) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Laplaceov razvoj} \\ \text{po zadnjem retku}}}{=}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-3) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Zadatak 4.10.} \\ \text{u trenutnim materijalima}}}{=}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!.$$

(b) Kako su A i B regularne, tada je i AB regularna. Stoga je

$$\widetilde{AB} = \det(AB)(AB)^{-1} \overset{\text{B-C}}{=} (\det A \cdot \det B)B^{-1}A^{-1} = \tilde{B}\tilde{A}.$$

ZADATAK 4

(a) (5 bodova) Riješite homogeni sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) (2 boda) Nađite sva rješenja sustava

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = b_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = b_3 \end{cases}$$

ako znate da je jedno rješenje $(1, 1, 2, 1)$.

(c) (3 boda) Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju za kvadratnu matricu A s cjelobrojnim elementima: ako je $\det A = 1$, tada za svaki vektor Y s cjelobrojnim elementima postoji vektor X s cjelobrojnim elementima takav da vrijedi $AX = Y$.

Rješenje:

(a)

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $x_1 = -\frac{4}{3}x_4$ i $x_2 = \frac{2}{3}x_4$, $x_3 = 0$. Neka je $x_4 = s$, $s \in \mathbb{R}$. Skup rješenja homogenog sustava je

$$\Omega = \left[\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

(b) Koristeći (a) i činjenicu da imamo zadano jedno partikularno rješenje, zaključujemo da je skup svih rješenja zadanog sustava linearna mnogostrukost

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \Omega,$$

tj. rješenja su oblika:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(c) S obzirom da je matrica kvadratna i $\det A = \pm 1 \neq 0$ zaključujemo da je sustav definiran matricom A Cramerov. Neka je y desna strana sustava s cjelobrojnim elementima. Rješenje možemo dobiti kao

$$x_i = \frac{D_i}{D},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

pri čemu je $D = \det A = 1$ i D_i determinanta matrice u kojoj je i-ti stupac matrice A zamijenjen s y. Kako i A i y imaju cjelobrojne elemente, tada i opisana matrica ima cjelobrojne koeficijente pa joj je i $\det A$ cijeli broj (po definiciji). Dakle x_i je cijeli broj za svaki $i = 1, \ldots, n$.

ZADATAK 5

(a) (3 bodova) Neka je $A \in M_{2n+1}$ antisimetrična matrica (to jest, takva da je $A^T = -A$). Dokažite da je A singularna matrica.

(b) (7 bodova) Neka je $A \in M_{mn}, n \geq 2$, matrica ranga $n-1$, te neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ njezini stupci. Ako je prvi stupac matrice A jednak sumi svih preostalih stupaca od A, odredite skup svih rješenja sustava $AX = S_1 - 2S_2$.

Rješenje:

(a) Iz $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$ slijedi $\det A = 0$, pa je A singularna.

(b) Znamo da je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rješenje sustava $AX = B$ ako i samo ako je $B = x_1 S_1 + x_2 S_2 + \ldots + x_n S_n$. Odavde slijedi da je $(1, -2, 0, \ldots, 0)$ jedno partikularno rješenje sustava $AX = S_1 - 2S_2$. Također, zbog $S_1 = S_2 + \ldots + S_n$, to jest $S_1 - S_2 - \ldots - S_n = 0$, slijedi i da je $(1, -1, -1, \ldots, -1)$ jedno rješenje homogenog sustava $AX = 0$. Iz $r(A) = n - 1$ zaključujemo da je $\dim \Omega = n - (n-1) = 1$, pa je $\Omega = [\{(1, -1, \ldots, -1)\}]$. Sada je skup svih rješenja sustava $AX = S_1 - 2S_2$ jednak

$$\{1, -2, 0, \ldots, 0) + \lambda(1, -1, -1, \ldots, -1) : \lambda \in \mathbb{F}\}.$$