

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Treći ispit – 24. 8. 2026.

Na kolokviju/ispitu nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i službenog šalabahtera.

Zadatak 1. (30 bodova)

- (a) (15 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{nx - x + 4n - 1}{(n+2)(x+3)} : n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\}$$

- (b) (15 bodova) Neka je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadan rekursivno:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}.$$

Ako postoji, odredite limes niza.

Uputa za rješenje. a) Algebraičkom manipulacijom preuređujemo izraz kako bismo ga sveli na zbroj dva izraza, od kojih jedan ovisi isključivo o n , a drugi isključivo o x :

$$f_n(x) = \frac{x(n-1) + 4n - 1}{(n+2)(x+3)} = \frac{(n-1)(x+3) - 3(n-1) + 4n - 1}{(n+2)(x+3)} = \frac{(n-1)(x+3) + n + 2}{(n+2)(x+3)}$$

$$f_n(x) = \frac{n-1}{n+2} + \frac{1}{x+3}$$

Sada analiziramo svaki sumand zasebno. Neka je $g(n) = \frac{n-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2}$. Za $n \in \mathbb{N}$, niz je strogo rastući, pa vrijedi:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} g(n) = g(1) = 0, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 1$$

Neka je $h(x) = \frac{1}{x+3}$. Za $x \geq 0$, funkcija je strogo padajuća, pa vrijedi:

$$\max_{x \geq 0} h(x) = h(0) = \frac{1}{3}, \quad \inf_{x \geq 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

Kako su varijable n i x nezavisne, supremum skupa S jednak je zbroju supremuma, a infimum zbroju infimuma:

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup_{n \in \mathbb{N}} g(n) + \sup_{x \geq 0} h(x) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ \inf S &= \inf_{n \in \mathbb{N}} g(n) + \inf_{x \geq 0} h(x) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

- b) Pretpostavimo da limes $L \geq 0$ postoji. Tada je $L = \sqrt{3 + 2L}$, što daje $L^2 - 2L - 3 = 0$. Rješenja su $L = 3$ i $L = -1$, pa je jedini kandidat za limes $L = 3$. Indukcijom dokazujemo omeđenost odozgo s 3 i strogi rast niza. *Omeđenost:* $a_1 = 0 < 3$. Ako je $a_n < 3$, tada je $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} < \sqrt{3 + 6} = \sqrt{9} = 3$. *Monotonost:* $a_2 = \sqrt{3} > 0 = a_1$. Ako je $a_n > a_{n-1}$, tada je $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} > \sqrt{3 + 2a_{n-1}} = a_n$. Prema teoremu o monotonij konvergenciji niz konvergira, a limes mu iznosi 3.

△

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Treći ispit – 24. 8. 2026.

Zadatak 2. (20 bodova)

- (a) (10 bodova) Odredite limes superior i limes inferior niza

$$a_n = \left(\sin(n\pi/2) + \cos(n\pi) \right)^n.$$

- (b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \sqrt{n}}$$

Uputa za rješenje. a) Promotrimo ponašanje niza za $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ ($k \in \mathbb{N}_0$): $a_{4k} = (0+1)^{4k} = 1$, $a_{4k+1} = (1-1)^{4k+1} = 0$, $a_{4k+2} = (0+1)^{4k+2} = 1$, $a_{4k+3} = (-1-1)^{4k+3} = (-2)^{4k+3}$. Podniz a_{4k+3} teži u $-\infty$, dok se ostali podnizovi stacioniraju u 1 i 0. Skup gomilišta je $\{0, 1, -\infty\}$. Slijedi: $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -\infty$.

- b) Koristimo granični kriterij u usporedbi s redom $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Neka je $a_n = \frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n^2})+\sqrt{n}}$ i $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(1+\frac{1}{n^2}) + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1 \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Budući da referentni p -red $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ divergira ($p = 1/2 \leq 1$), po graničnom kriteriju divergira i zadani red.

△

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Treći ispit – 24. 8. 2026.

Zadatak 3. (25 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\operatorname{tg} x} - 5^{\sin x}}{x^3}.$$

(b) (10 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(1/x))^{x^2}.$$

Uputa za rješenje. a) Transformiramo izraz i koristimo tablične limese:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\sin x} (5^{\operatorname{tg} x - \sin x} - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} 5^{\sin x} \cdot \frac{5^{\operatorname{tg} x - \sin x} - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

Prvi faktor teži u $5^0 = 1$. Drugi u $\ln 5$. Za treći faktor imamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Ukupni limes iznosi $\frac{\ln 5}{2}$.

b) Uvodimo supstituciju $t = 1/x$. Kada $x \rightarrow +\infty$, tada $t \rightarrow 0^+$. Zadani limes poprima oblik 1^∞ :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\cos t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (1 + (\cos t - 1))^{\frac{1}{t^2}}$$

Dodajemo i oduzimamo odgovarajući eksponent kako bismo dobili tablični limes za broj e :

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[(1 + (\cos t - 1))^{\frac{1}{\cos t - 1}} \right]^{\frac{\cos t - 1}{t^2}}$$

Baza teži u e , a u eksponentu prepoznavamo standardni tablični limes:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

Zadani limes jednak je $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

△

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Treći ispit – 24. 8. 2026.

Zadatak 4. (25 bodova)

- (a) (15 bodova) Definirajte gomilište niza realnih brojeva. Zatim dokažite da je broj a gomilište niza (a_n) ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ interval $\langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$ sadrži beskonačno mnogo članova niza (a_n) .
- (b) (10 bodova) Dokažite po definiciji da je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 3x + 2$ neprekidna u svakoj točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Uputa za rješenje. a) Vidjeti skriptu, Propozicija 2.1.

- b) Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Želimo dokazati da je funkcija f neprekidna u točki x_0 .

Prema definiciji neprekidnosti, trebamo dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je

$$f(x) = 3x + 2,$$

imamo

$$|f(x) - f(x_0)| = |(3x + 2) - (3x_0 + 2)| = |3x - 3x_0| = 3|x - x_0|.$$

Odaberimo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ako je $|x - x_0| < \delta$, tada je

$$|f(x) - f(x_0)| = 3|x - x_0| < 3\delta = 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ takav da

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Prema definiciji, funkcija f je neprekidna u točki x_0 . Budući da je $x_0 \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, funkcija f je neprekidna na $\mathbb{R}$.

△