

ANALITIČKA GEOMETRIJA

prvi kolokvij, 30. studenog 2022.

1. a) Definirajte ekvivalentnost usmjerenih dužina u E^3 , dokažite da ona ima svojstvo simetričnosti te potom definirajte pojam vektora. (6)
- b) Definirajte množenje vektora skalarom. Dokažite da je zbrajanje vektora komutativno. Za vektore $\vec{a} = (1, -3, 2)$ i $\vec{b} = (1, -1, 0)$ napišite neki vektor $\vec{c} \in V^3$ koji se ne može zapisati kao njihova linearna kombinacija te obrazložite Vaš odgovor. (7)
- c) Pretpostavimo da vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$ čine bazu prostora V^3 . Precizno napišite koje sve uvjete takvi vektori moraju zadovoljavati da bi $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ bila desno orijentirana ortonormirana baza. Neka su dani vektori $\vec{e} = (0, 1, 0)$ i $\vec{f} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Odredite neki vektor \vec{g} takav da $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ bude lijevo orijentirana ortonormirana baza. (3)
- d) Dokažite formulu za vrijednost mješovitog produkta tri vektora iz V^3 koji su zadani svojim koordinatama u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi. Koristeći tu formulu, ispitajte jesu li vektori $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ i $\vec{w} = (0, 1, -1)$, čije su koordinate zadane u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi, komplanarni. Obrazložite Vaš odgovor. (4)
2. a) Izvedite parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca u ravnini koji prolazi dvjema točkama $T_1 = (x_1, y_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2)$. (3)
- b) Napišite kanonske oblike jednadžbi neka tri različita pravca p, q i r u ravnini takva da je p paralelan q te da je r okomit na q . (2)
3. Neka je $\vec{a} = (0, 3, 4) \in V^3$ te neka je $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$ rastav vektora \vec{a} na dva međusobno okomita nenul vektora takvih da je \vec{y} kolinearan vektoru $\vec{b} = (1, 0, 1)$.
- a) Odredite vektore \vec{x} i \vec{y} . (4)
- b) Odredite površinu pravokutnika razapetog vektorima \vec{x} i \vec{y} . (2)
- c) Neka je \vec{t}_a težišnica na stranicu određenu vektorom \vec{a} u trokutu koji je određen vektorima \vec{a}, \vec{x} i \vec{y} . Odredite kut između vektora \vec{x} i \vec{t}_a (dovoljno je odrediti kosinus kuta). (1)
4. Zadan je trapez $ABCD$ pri čemu je $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Neka je točka S sjecište pravaca AC i BD , a točka T sjecište pravaca AD i BC . Neka je točka X sjecište pravaca ST i CD . Odredite omjer duljina dužina \overline{TX} i \overline{SX} . (7)
5. Zadana je trostrana piramida $ABCD$ s vrhom D i bazom trokutom ABC gdje su $A = (1, 1, 0)$, $B = (4, -1, -1)$, $C = (3, 1, 2)$ i $D = (1, -4, 2)$. Neka je točka E nožište okomice iz točke D na bazu. Odredite volumen piramide $AECD$. (6)
- (Uputa : Vektor \overrightarrow{AE} je ortogonalna projekcija vektora \overrightarrow{AD} na ravninu ABC .)

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

prvi kolokvij, 30. studenog 2022.

1. a) Definirajte ekvivalentnost usmjerenih dužina u E^3 , dokažite da ona ima svojstvo simetričnosti te potom definirajte pojam vektora. (6)
- b) Definirajte množenje vektora skalarom. Dokažite da je zbrajanje vektora komutativno. Za vektore $\vec{x} = (3, -2, -1)$ i $\vec{y} = (0, -1, 1)$ napišite neki vektor $\vec{z} \in V^3$ koji se ne može zapisati kao njihova linearna kombinacija te obrazložite Vaš odgovor. (7)
- c) Pretpostavimo da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ čine bazu prostora V^3 . Precizno napišite koje sve uvjete takvi vektori moraju zadovoljavati da bi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bila desno orijentirana ortonormirana baza. Neka su dani vektori $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ i $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Odredite neki vektor \vec{w} takav da $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ bude lijevo orijentirana ortonormirana baza. (3)
- d) Dokažite formulu za vrijednost mješovitog produkta tri vektora iz V^3 koji su zadani svojim koordinatama u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi. Koristeći tu formulu, ispitajte jesu li vektori $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ i $\vec{w} = (1, 1, -1)$, čije su koordinate zadane u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi, komplanarni. Obrazložite Vaš odgovor. (4)
2. a) Izvedite parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca u ravnini koji prolazi dvjema točkama $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. (3)
- b) Napišite kanonske oblike jednadžbi neka tri različita pravca p, q i r u ravnini takva da je p okomit na q te da je r paralelan q . (2)
3. Neka je $\vec{a} = (0, -2, 5) \in V^3$ te neka je $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$ rastav vektora \vec{a} na dva međusobno okomita nenul vektora takvih da je \vec{y} kolinearan vektoru $\vec{b} = (1, 1, -2)$. (7)
- a) Odredite vektore \vec{x} i \vec{y} . (4)
- b) Odredite površinu pravokutnika razapetog vektorima \vec{x} i \vec{y} . (2)
- c) Neka je \vec{t}_a težišnica na stranicu određenu vektorom \vec{a} u trokutu koji je određen vektorima \vec{a}, \vec{x} i \vec{y} . Odredite kut između vektora \vec{x} i \vec{t}_a (dovoljno je odrediti kosinus kuta). (1)
4. Zadan je trapez $ABCD$ pri čemu je $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Neka je točka S sjecište pravaca AC i BD , a točka T sjecište pravaca AD i BC . Neka je točka X sjecište pravaca ST i CD . Odredite omjer duljina dužina \overline{TX} i \overline{SX} . (7)
5. Zadana je trostrana piramida $ABCD$ s vrhom D i bazom trokutom ABC gdje su $A = (3, 1, 2)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (4, -1, -1)$ i $D = (1, -4, 2)$. Neka je točka E nožište okomice iz točke D na bazu. Odredite volumen piramide $BECD$. (6)
- (Uputa : Vektor \overrightarrow{BE} je ortogonalna projekcija vektora \overrightarrow{BD} na ravninu ABC .)

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.