

Problem računanja površine

Često se susrećemo s problemom računanja površine nepravilnih objekata u ravnini. Oni se često mogu "rasjeći" na dijelove koje možemo interpretirati kao površine ispod grafa funkcija. Stoga možemo postaviti sljedeće pitanje: kako izračunati površinu između grafa funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i x -osi? (ovu površinu ćemo nadalje zvati površinom ispod grafa funkcije)

Primjer

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Neka je tražena površina P . Fiksirajmo neki $n \in \mathbb{N}$. Podijelimo sada segment $[0, 1]$ na n jednakih dijelova; dakle i -ti podsegment je $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Neka je P_i površina ispod grafa naša funkcije, ali na i -tom segmentu. Dakle, $P = P_1 + \dots + P_n$. Sada ćemo **aproksimirati** površinu P_i (a to je površina krivocrtnog trapeza) s nečim što znamo izračunati, a to je površina pravokutnika. Krivocrtni trapez u sebi sadrži pravokutnik $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [0, (\frac{i-1}{n})^2]$, a sadržan je u pravokutniku $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [0, (\frac{i}{n})^2]$.

Primjetimo da je $(\frac{i-1}{n})^2$ **minimalna vrijednost** koju funkcija f postiže na $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, a $(\frac{i}{n})^2$ **maksimalna**. Prema tome, za odnose površina vrijedi Tada vrijedi $\frac{1}{n}(\frac{i-1}{n})^2 \leq P_i \leq \frac{1}{n}(\frac{i}{n})^2$. Sada sumiramo ove nejednakosti po $i = 1, 2, \dots, n$. Dobivamo

$$\frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right) \leq P \leq \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right).$$

Nadalje, koristeći formulu za zbroj kvadrata prvih $n - 1$ odnosno n prirodnih brojeva, dobivamo:

$$\frac{1}{n} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq P \leq \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Primjetimo da ovaj račun vrijedi za svaki prirodni broj n (broj podintervala na koje smo podijelili segment $[0, 1]$).

Prema tome, možemo pustiti $n \rightarrow \infty$ i vidjeti što se zbiva. Također, veličina P ne ovisio n . Dobivamo

$$\frac{1}{3} \leq P \leq \frac{1}{3}.$$

Zaključujemo da je $P = \frac{1}{3}$. Ovaj pristup je adaptacija Arhimedovog rješavanja ovog problema.

Pokušajmo sada, vođeni ovim primjerom, opisati postupak za računanje površine ispod grafa općenite funkcije.