

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje samo službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 18 bodova) Izračunajte

(a) (9 bodova) $\int_{e^3}^{+\infty} \frac{e^{-\ln^4 x} \ln^3 x}{x} dx$

(b) (9 bodova) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

2. (ukupno 16 bodova) Izračunajte:

(a) (8 bodova) $\int \frac{x}{x^2 - 2x + 5} dx$

(b) (8 bodova) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

3. (ukupno 16 bodova) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x-3}$, $y = \frac{1}{4}x$ i $y = 0$
- (a) (8 bodova) oko x -osi;
 - (b) (8 bodova) oko y -osi.

4	5a	5b	6	7a	7b	8

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

4. Za particiju $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ kažemo da je regularna ako svi segmenti $[x_{i-1}, x_i]$ imaju istu duljinu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ regularna particija od $[0, 1]$ i neka je $f(x) = x^2$.

- (a) (10 bodova) Izračunajte donju i gornju Darbouxovu sumu funkcije f za particiju P . Dobiveni izrazi trebaju sadržavati samo n kao parametar.
 (b) (2 bodova) Izračunajte limes gornje i donje Darbouxove sume kada $n \rightarrow \infty$.

Korisna formula: $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$.

5. (8 bodova) Izračunajte $F'(x)$ gdje je F zadana s

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{1+t^4} dt$$

6. Skicirajte područje ograničeno krivuljama $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$. Površinu područja predstavite preko integrala

- (a) (6 bodova) po x varijabli,
 (b) (6 bodova) po y varijabli.

Nije potrebno računati integrale.

7. (8 bodova) Nađite težište područja omeđenog krivuljom $y = \operatorname{ch} x$ i x osi od $x = 0$ do $x = 1$.

8. (10 bodova) Ispitajte ograničenost i monotonost te nađite limes niza koji zadovoljava rekursivnu relaciju

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$$

te za koji vrijedi $a_1 = 1$.

1a	1b

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje samo službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (18 bodova) Izračunajte

(a) (9 bodova) $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{e^{-\ln^3 x} \ln^2 x}{x} dx$

(b) (9 bodova) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

2. (ukupno 16 bodova) Izračunajte:

(a) (8 bodova) $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 20} dx$

(b) (8 bodova) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

3. (ukupno 16 bodova) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = \sqrt{x-2}$, $y = \frac{1}{3}x$ i $y = 0$
- (a) (8 bodova) oko x -osi;
- (b) (8 bodova) oko y -osi.

4	5a	5b	6	7a	7b	8

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 21. lipnja 2017.

4. Za particiju $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ kažemo da je regularna ako svi segmenti $[x_{i-1}, x_i]$ imaju istu duljinu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Neka je $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ regularna particija od $[0, b]$ i neka je $f(x) = x$.
- (a) (10 bodova) Izračunajte donju i gornju Darbouxovu sumu funkcije f za particiju P . Dobiveni izrazi trebaju sadržavati samo b i n kao parametre.
- (b) (2 bodova) Izračunajte limes gornje i donje Darbouxove sume kada $n \rightarrow \infty$.
5. (8 bodova) Izračunajte $F'(x)$ gdje je F zadana s

$$F(x) = \int_{x^2}^1 (t - \sin^2 t) dt$$

6. Skicirajte područje ograničeno krivuljama $y = 2 \cos x$, $y = \sin 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Površinu područja predstavite preko integrala
- (a) (6 bodova) po x varijabli,
- (b) (6 bodova) po y varijabli.
- Nije potrebno računati integrale.
7. (8 bodova) Gustoća mase šipke koja se proteže od $x = 2$ do $x = 3$ dana je funkcijom $\rho(x) = \ln x$. Nađite centar mase šipke.
8. (10 bodova) Ispitajte ograničenost i monotonost te nađite limes niza koji zadovoljava rekursivnu relaciju

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$$

te za koji vrijedi $a_1 = 1/4$.