

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 23.06.2021.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 15 bodova) Izračunajte:

(a) (9 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{e^x \sin(2e^x)}{\sqrt{1 + \cos^2(e^x)}} dx.$$

(b) (6 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 23.06.2021.

2. (ukupno 20 bodova) Izračunajte:

(a) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

(b) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{2dx}{4 \sin x - 3 \cos x + 5}.$$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 23.06.2021.

3. (ukupno 15 bodova)

- (a) (7 bodova) Odredite volumen tijela koji nastaje rotacijom lika (u prvom kvadrantu) omeđenog krivuljama $y = 2x^2$, $y = x + 1$ i $x = 0$ oko x -osi.
- (b) (8 bodova) Izračunajte nepravi integral

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 23.06.2021.

4. (10 bodova) Neka su $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, 1\}$ čvorovi ekvidistantne particije segmenta $[0, 1]$. Za takvu particiju izračunajte gornju i donju Darbouxovu sumu, S_n, s_n , funkcije $f(x) = e^x$. Nađite limese

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad .$$

Pomoću dobivenog izračunajte

$$\int_0^1 e^x dx \quad .$$

5. (10 bodova) Neka su f i g neprekinute funkcije na segmentu $[a, b]$. Neka je $\mathcal{P}$ particija segmenta $[a, b]$ te neka su $S(f, \mathcal{P})$, $S(g, \mathcal{P})$, $S(f + g, \mathcal{P})$ gornje Darbouxove sume funkcija f , g i $f + g$ za particiju $\mathcal{P}$. Pokažite da je

$$S(f, \mathcal{P}) + S(g, \mathcal{P}) \geq S(f + g, \mathcal{P}) \quad .$$

Vrijedi li

$$S(f, \mathcal{P}) + S(g, \mathcal{P}) = S(f + g, \mathcal{P}) \quad ?$$

Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom.

6. (10 bodova) Provjerite konvergenciju nepravog integrala

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} dx \quad .$$

7. (10 bodova) Izračunajte

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x - \cos x| dx \quad .$$

8. (10 bodova) Niz (a_n) rekurzivno je zadan s $a_1 = a_2 = 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + 2a_n}{2} \quad .$$

Provjerite konvergenciju. Ako postoji, nađite limes.