

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 28.4.2023.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

1. Izračunajte sljedeće limese

(a) (8 bodova) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x \right)$

(b) (8 bodova) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\sin x)}$

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 28.4.2023.

2. (ukupno 10 bodova) Među svim pravilnim četverostranim piramidama volumena $\frac{1}{3}$ odredite onu kojoj je duljina pobočnog brida najmanja.

3a	3b	3c	3d	3e

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 28.4.2023.

3. (ukupno 24 bodova) Dana je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$. Odredite
- (a) (2 boda) prirodnu domenu funkcije;
 - (b) (6 bodova) asimptote
 - (c) (10 bodova) intervale monotonosti i zakrivljenosti, te točke lokalnih ekstrema i infleksije;
 - (d) (2 boda) skicu grafa funkcije;
 - (e) (4 boda) sve točke grafa funkcije za koje vrijedi da tangenta povučena tom točkom prolazi točkom $(1, 0)$.

4	5	6	7	8

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 28.4.2023.

4. (10 bodova) Neka je zadan $\epsilon > 0$ i neka je $f(x) = \sqrt{|x|}$. Nađite $\delta > 0$ takav da za sve x za koje vrijedi $0 < |x| < \delta$ imamo $|f(x)| < \epsilon$.
5. (10 bodova) Neka funkcije f, g zadovoljavaju $f(x) \leq g(x)$ i neka postoje limesi od f i g u a . Dokažite da vrijedi
- $$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$
6. (10 bodova) Neka su f i g neprekidne funkcije na $[a, b]$ i neka vrijedi $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Dokažite da vrijedi $f(x) = g(x)$ za neki $x \in [a, b]$.
7. (10 bodova) Neka je dana funkcija f koja je derivabilna u točki a i neka je $f(a) \neq 0$. Dokažite da je funkcija $|f|$ također derivabilna u a .
8. (10 bodova) Neka je funkcija f takva da vrijedi $f'(x) \leq M$ za sve $x \in [a, b]$. Dokažite da tada vrijedi $f(b) \leq f(a) + M(b - a)$.

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 28.4.2023.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

1. Izračunajte sljedeće limese

(a) (8 bodova) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x \right)$

(b) (8 bodova) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\operatorname{tg} x)}$

Diferencijalni i integralni račun 1
prvi kolokvij, 28.4.2023.

2. (ukupno 10 bodova) Među svim pravilnim trostranim piramidama volumena $\frac{\sqrt{3}}{12}$ odredite onu kojoj je duljina pobočnog brida najmanja.

3a	3b	3c	3d	3e

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 28.4.2023.

3. (ukupno 24 bodova) Dana je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$. Odredite
- (a) (2 boda) prirodnu domenu funkcije;
 - (b) (6 bodova) asimptote
 - (c) (10 bodova) intervale monotonosti i zakrivljenosti, te točke lokalnih ekstrema i infleksije;
 - (d) (2 boda) skicu grafa funkcije;
 - (e) (4 boda) sve točke grafa funkcije za koje vrijedi da tangenta povučena tom točkom prolazi točkom $(-1, 0)$.

4	5	6	7	8

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 28.4.2023.

- (10 bodova) Neka je zadan $\epsilon > 0$ i neka je $f(x) = \frac{x}{1+\sin^2 x}$. Nađite $\delta > 0$ takav da za sve x za koje vrijedi $0 < |x| < \delta$ imamo $|f(x)| < \epsilon$.
- (10 bodova) Nađite primjer funkcije f takve da postoji $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x^2)$, ali ne postoji $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (10 bodova) Neka funkcija f zadovoljava jednadžbu $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i neka je f neprekidna u nuli. Dokažite da je f neprekidna svugdje.
- (10 bodova) Dokažite da jednadžba

$$\sin x = x - 1$$

ima barem jedno rješenje.

- (10 bodova) Neka je funkcija f takva da vrijedi $f'(x) \geq M$ za sve $x \in [a, b]$. Dokažite da tada vrijedi $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.