

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

1. ispitni rok – 28. 1. 2026.

Napomene: Odmah potpišite sve listove koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja. Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

Zadatak 1. (16 bodova)

a) Provjerite konvergira li red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^5-1}}.$$

b) Pronađite Taylorov polinom oko 0 stupnja 5 funkcije $f(x) = x^2 \cos(3x)$ i odredite koliko iznosi $f^{(50)}(0)$.

Rješenje. a) Najjednostavnije je provjeriti apsolutnu konvergenciju. Ako konvergira apsolutno, odnosno ako red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^5-1}}$ konvergira onda (po tm o apsolutnoj konvergenciji) konvergira i početni red. Ovaj red se asimptotski ponaša kao $\sum \frac{1}{n^{7/2}}$ pa uspoređujemo s tim redom.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n^5-1}}}{\frac{1}{n^{7/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-1/n^5}} = 1$$

S obzirom da je $q > 0$ i red $\sum \frac{1}{n^{7/2}}$ konvergira, i red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^5-1}}$ konvergira.

Alternativno, red zadovoljava uvjete Leibnizovog kriterija.

b) Analogno primjeru 3.11 iz skripte za vježbe.

△

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

1. ispitni rok – 28. 1. 2026.

Zadatak 2. (18 bodova)

a) (10 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \ln(xy + 3) - x^2/5 - y^2/20$.

b) (8 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $g(x, y) = 3x^2 - 4y$ na domeni

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^3 \leq y \leq 1\}.$$

Rješenje. a) Stacionarne točke:

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{y}{xy+3} - \frac{2x}{5} \\ \frac{x}{xy+3} - \frac{y}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponožimo prvu jednadžbu s x , drugu s y i oduzmemo. Dobivamo $y^2 = 4x^2$, tj. $y = \pm 2x$.

Uvrštavanjem $y = 2x$ u drugu jednadžbu:

$$\frac{x}{2x^2 + 3} = \frac{2x}{10} \implies 2x^2 + 3 = 5 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

To daje stacionarne točke $(1, 2)$ i $(-1, -2)$. Obje zadovoljavaju uvjet domene ($xy + 3 = 5 > 0$).

Uvrštavanjem $y = -2x$ u drugu jednadžbu:

$$\frac{x}{-2x^2 + 3} = \frac{-2x}{10} \implies -2x^2 + 3 = -5 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

To daje točke $(2, -4)$ i $(-2, 4)$, ali one nisu u domeni jer je $xy + 3 = -8 + 3 = -5 < 0$.

Slučaj $x = 0$ povlači $y = 0$, što daje treću stacionarnu točku $T_3(0, 0)$.

Hesseova matrica:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{y^2}{(xy+3)^2} - \frac{2}{5} & \frac{3}{(xy+3)^2} \\ \frac{3}{(xy+3)^2} & -\frac{x^2}{(xy+3)^2} - \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Za naše stacionarne točke:

$$H(1, 2) = H(-1, -2) = \begin{bmatrix} -\frac{14}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} & -\frac{7}{50} \end{bmatrix},$$

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Provjeravamo Sylvestereov kriterij, obje prve minore su negativne. Determinante matrica su redom $\frac{1}{25^2}(14 \cdot 7/2 - 9) > 0$ i $\frac{1}{5^2} - \frac{1}{3^2} < 0$. Zato su točke $(1, 2)$, $(-1, -2)$ točke lokalnih maksimuma, a $(0, 0)$ sedlasta točka. Vrijednost lokalnog maksimuma je $\ln 5 - \frac{2}{5}$.

b) Matrica derivacija: $Dg(x, y) = [6x \ -4]$ nikad nije jednaka nuli. Zato prelazimo na rubove. Prvi rub je $x = 0$, pa imamo $g_1(y) = -4y$, $g'_1(y) = -4$, što opet nikad nije jednako nuli. Drugi rub je $y = 1$, odakle imamo $g_2(x) = 3x^2 - 1$, $g'_2(x) = 6x$, odakle dobivamo kandidat $(0, 1)$, što je ionako rub rubova domene.

Preostao je jedini netrivialni rub: $y = x^3$, odakle imamo $g_3(x) = 3x^2 - 4x^3$, $g'_3(x) = 6x - 12x^2$. Nultočke su $x = 0$ i $x = 1/2$, odakle dobivamo kandidate $(0, 1)$ i $(1/2, 1/8)$.

Provjeravamo vrijednosti funkcije u zadnje dobivenoj točki i svim rubovima rubova: $g(0, 0) = 0$, $g(0, 1) = -4$, $g(1, 1) = -1$, $g(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$. Uočavamo da je globalni minimum jednak -4 i ostvaruje se u $(0, 1)$, a globalni maksimum jednak $1/4$ i ostvaruje se u $(1/2, 1/8)$.

△

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

1. ispitni rok – 28. 1. 2026.

Zadatak 3. (16 bodova) Izračunajte volumen tijela ispod konusa $z^2 = x^2 + y^2$, unutar cilindra $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ i iznad xy -ravnine.

Rješenje. Pogledaj primjer 9.13. iz skripte za vježbe.

△

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

1. ispitni rok – 28. 1. 2026.

Zadatak 4. (10 bodova) Integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z) \, dz \, dy \, dx$$

napišite u obliku

$$\int_{\text{?}}^{\text{?}} \int_{\text{?}}^{\text{?}} \int_{\text{?}}^{\text{?}} (x+y+z) \, dx \, dy \, dz$$

i onda ga riješite.

Zadatak 5. (10 bodova) Ima li funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ako je } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

limes u točki $(0, 0)$?

Zadatak 6. (10 bodova) Neka je krivulja Γ dana s

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0, 0 \leq x \leq 4\}$$

Izračunajte

$$\int_{\bar{\Gamma}} y \, dx.$$

Krivulju Γ u zadanom integralu orijentirajte kako god želite, ali u rješenju napomenite kako ste ju orijentirali.

Zadatak 7. (10 bodova) Zadan je skup

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq y + z \leq 1, 0 \leq z + x \leq 1\}.$$

Neka je $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ zadana formulama

$$F(x, y, z) = (u, v, w)$$

te

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y + z \\ w = z + x \end{cases}.$$

- (a) Da li je skup D omeđen?
- (b) Pokažite da je F bijekcija te joj nađite inverz.
- (c) Odredite skup $H = F(D)$.

(d) U integralu

$$\iiint_D dx \, dy \, dz \quad ,$$

zamijenite varijable x, y, z s varijablama u, v, w te ga riješite.

Zadatak 8. (10 bodova) Neka je $u : \mathcal{O} \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija klase C^2 koja zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial u}{\partial x}(T) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(T) \quad ,$$

za neki $T = (x_0, y_0) \in \mathcal{O}$. Broj $\alpha > 0$ je zadana konstanta. Pokažite sljedeću tvrdnju: Ako u točki T vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(T) \neq 0$$

onda funkcija u ne može imati lokalni ekstrem u točki T .