

## DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi kolokvij – 28. 1. 2026.

**Napomene:** Odmah potpišite sve listove koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja. Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

**Zadatak 1.** (18 bodova)

a) (10 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije  $f(x, y) = \ln(xy + 3) - x^2/5 - y^2/20$ .

b) (8 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije  $g(x, y) = 3x^2 - 4y$  na domeni

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^3 \leq y \leq 1\}.$$

*Rješenje.* a) Stacionarne točke:

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{y}{xy+3} - \frac{2x}{5} \\ \frac{x}{xy+3} - \frac{y}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ponožimo prvu jednadžbu s  $x$ , drugu s  $y$  i oduzmemo. Dobivamo  $y^2 = 4x^2$ , tj.  $y = \pm 2x$ .

Uvrštavanjem  $y = 2x$  u drugu jednadžbu:

$$\frac{x}{2x^2 + 3} = \frac{2x}{10} \implies 2x^2 + 3 = 5 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

To daje stacionarne točke  $(1, 2)$  i  $(-1, -2)$ . Obje zadovoljavaju uvjet domene ( $xy + 3 = 5 > 0$ ).

Uvrštavanjem  $y = -2x$  u drugu jednadžbu:

$$\frac{x}{-2x^2 + 3} = \frac{-2x}{10} \implies -2x^2 + 3 = -5 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

To daje točke  $(2, -4)$  i  $(-2, 4)$ , ali one nisu u domeni jer je  $xy + 3 = -8 + 3 = -5 < 0$ .

Slučaj  $x = 0$  povlači  $y = 0$ , što daje treću stacionarnu točku  $T_3(0, 0)$ .

Hesseova matrica:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{y^2}{(xy+3)^2} - \frac{2}{5} & \frac{3}{(xy+3)^2} \\ \frac{3}{(xy+3)^2} & -\frac{x^2}{(xy+3)^2} - \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Za naše stacionarne točke:

$$H(1, 2) = H(-1, -2) = \begin{bmatrix} -\frac{14}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{3}{25} & -\frac{7}{50} \end{bmatrix},$$

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Provjeravamo Sylvestereov kriterij, obje prve minore su negativne. Determinante matrica su redom  $\frac{1}{25^2}(14 \cdot 7/2 - 9) > 0$  i  $\frac{1}{5^2} - \frac{1}{3^2} < 0$ . Zato su točke  $(1, 2)$ ,  $(-1, -2)$  točke lokalnih maksimuma, a  $(0, 0)$  sedlasta točka. Vrijednost lokalnog maksimuma je  $\ln 5 - \frac{2}{5}$ .

b) Matrica derivacija:  $Dg(x, y) = [6x \ -4]$  nikad nije jednaka nuli. Zato prelazimo na rubove. Prvi rub je  $x = 0$ , pa imamo  $g_1(y) = -4y$ ,  $g'_1(y) = -4$ , što opet nikad nije jednako nuli. Drugi rub je  $y = 1$ , odakle imamo  $g_2(x) = 3x^2 - 1$ ,  $g'_2(x) = 6x$ , odakle dobivamo kandidat  $(0, 1)$ , što je ionako rub rubova domene.

Preostao je jedini netrivialni rub:  $y = x^3$ , odakle imamo  $g_3(x) = 3x^2 - 4x^3$ ,  $g'_3(x) = 6x - 12x^2$ . Nultočke su  $x = 0$  i  $x = 1/2$ , odakle dobivamo kandidate  $(0, 1)$  i  $(1/2, 1/8)$ .

Provjeravamo vrijednosti funkcije u zadnje dobivenoj točki i svim rubovima rubova:  $g(0, 0) = 0$ ,  $g(0, 1) = -4$ ,  $g(1, 1) = -1$ ,  $g(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$ . Uočavamo da je globalni minimum jednak  $-4$  i ostvaruje se u  $(0, 1)$ , a globalni maksimum jednak  $1/4$  i ostvaruje se u  $(1/2, 1/8)$ .

△

## DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi kolokvij – 28. 1. 2026.

**Zadatak 2.** (16 bodova)

(a) (8 bodova) Odredite

$$\int_{1/2}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 (x^2 + y^2)^{-3/2} dx dy.$$

(b) (8 bodova) Odredite krivuljni integral

$$\int_C (e^{x+y} + \sqrt{x^2 + 1}) dx + (y^3 x + e^{x+y}) dy,$$

gdje je  $C$  elipsa dana parametrizacijom  $C(t) = (3 \cos t + 2, 2 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

*Rješenje.* a) Nakon polarnih koordinata:

$$I = \int_{\pi/2}^{5\pi/6} \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^1 r^{-2} dr d\theta = \int_{\pi/2}^{5\pi/6} (2 \sin \theta - 1) d\theta = [-2 \cos \theta - \theta]_{\pi/2}^{5\pi/6} = \sqrt{3} - \frac{2\pi}{6}.$$

b) Identificiramo komponente i derivacije:

$$P = e^{x+y} + \sqrt{x^2 + 1} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y}$$

$$Q = y^3 x + e^{x+y} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = y^3 + e^{x+y}.$$

Primjenom Greenova teorema:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (y^3 + e^{x+y} - e^{x+y}) dA = \iint_D y^3 dA.$$

Područje  $D$  je unutrašnjost elipse:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

Zbog simetrije područja  $D$  s obzirom na  $x$ -os i neparnosti funkcije  $f(x, y) = y^3$  po varijabli  $y$ :

$$\iint_D y^3 dA = 0.$$

Konačni rezultat:

$$\int_C (e^{x+y} + \sqrt{x^2 + 1}) dx + (y^3 x + e^{x+y}) dy = 0.$$

△

**DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2**

Drugi kolokvij – 28. 1. 2026.

**Zadatak 3.** (16 bodova) Izračunajte volumen tijela ispod konusa  $z^2 = x^2 + y^2$ , unutar cilindra  $(x - 3)^2 + y^2 = 9$  i iznad  $xy$ -ravnine.

*Rješenje.* Pogledaj primjer 9.13. iz skripte za vježbe.

△

## DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN 2

Drugi kolokvij – 28. 1. 2026.

**Zadatak 4.** (10 bodova) Integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x + y + z) \, dz \, dy \, dx$$

napišite u obliku

$$\int_{?}^{?} \int_{?}^{?} \int_{?}^{?} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$$

i onda ga riješite.

**Zadatak 5.** (10 bodova) Skicirajte područje integracije i izračunajte

$$\int_{-1}^1 \int_{-x^2}^{x^2} \sin(x \sqrt[3]{y}) \, dy \, dx \quad .$$

**Zadatak 6.** (10 bodova) Neka je krivulja  $\Gamma$  dana s

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0, 0 \leq x \leq 4\}$$

Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} y \, dx \quad .$$

Krivulju  $\Gamma$  u zadanom integralu orijentirajte kako god želite, ali u rješenju napomenite kako ste ju orijentirali.

**Zadatak 7.** (10 bodova) Zadan je skup

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq y + z \leq 1, 0 \leq z + x \leq 1\} \, .$$

Neka je  $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  zadana formulama

$$F(x, y, z) = (u, v, w)$$

te

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = y + z \\ w = z + x \end{cases} \quad .$$

(a) Da li je skup  $D$  omeđen?

(b) Pokažite da je  $F$  bijekcija te joj nađite inverz.

(c) Odredite skup  $H = F(D)$ .

(d) U integralu

$$\iiint_D dx \, dy \, dz \quad ,$$

zamijenite varijable  $x, y, z$  s varijablama  $u, v, w$  te ga riješite.

**Zadatak 8.** (10 bodova) Neka je  $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$  proizvoljna zatvorena glatka krivulja. Dokažite, ili kontraprimjerom opovrgnite, sljedeće jednakosti :

(a) 
$$\int_{\vec{\Gamma}} x \, dx = \int_{\vec{\Gamma}} y \, dy \quad .$$

(b) 
$$\int_{\vec{\Gamma}} x \, dy = - \int_{\vec{\Gamma}} y \, dx \quad .$$