Vježbe MMF2

Fran Mišković

19. ožujka 2026.

1 Treće vježbe - Frobeniusova metoda

Služi za rješavanje linearnih homogenih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. U Frobeniusovoj metodi rješenje zapišemo kao:

$$y(x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

pri čemu $a_0 \neq 0$, tj. r je najmanji mogući **realni** broj za kojeg postoji rješenje. Uvrštavanjem za jednostavne (polinomijalne) P i Q dobit ćemo relaciju na koeficijentima. Preko koeficijenata najmanjeg reda provjeravamo koja su moguća rješenja. Rješenja se mogu pronaći i razvojem oko x_0.

Zadatak 1. U kvantnoj analizi iona molekula vodika imamo primjer jednadžbe:

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right] + \alpha u + \beta\eta^2 u = 0.$$

Nađite prva tri nenul koeficijenta u razvoju rješenja jednadžbe u ovisnosti o a_0.

Rješenje. Prvo zapišimo jednadžbu u standardnom obliku:

$$0 = \frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right] + \alpha u + \beta\eta^2 u = (1-\eta^2)\frac{d^2u}{d\eta^2} - 2\eta\frac{du}{d\eta} + (\alpha+\beta\eta^2)u$$

Neka je sada $u(\eta) = \eta^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k \eta^k$. Raspisujemo:

$$\begin{aligned}
0 &= (1-\eta^2)\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k\eta^{k+r-2} - 2\eta\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k\eta^{k+r-1} + (\alpha+\beta\eta^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_k\eta^{k+r} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k\eta^{k+r-2} - \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k\eta^{k+r} - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k\eta^{k+r} + \\
&+ \alpha\sum_{k=0}^{\infty}a_k\eta^{k+r} + \beta\sum_{k=0}^{\infty}a_k\eta^{k+r+2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k\eta^{k+r-2} - \sum_{k=2}^{\infty}(k+r-2)(k+r-1)a_{k-2}\eta^{k+r-2} + \alpha\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}\eta^{k+r-2} + \beta\sum_{k=4}^{\infty}a_{k-4}\eta^{k+r-2}
\end{aligned}$$

Zbog jedinstvenosti razvoja znamo da je $r(r-1)a_0 = 0$, tj. $r(r-1)$. **Ovu jednadžbu zovemo indicijska jednadžba.** Također, $(r+1)ra_1 = 0$. U slučaju $r = 0$ nemamo ograničenja na a_1, a u slučaju $r = 1$ imamo $a_1 = 0$. Pogledajmo slučaj $r = 1$ kako bismo se riješili ovisnosti o a_1. Iz jednadžbe imamo:

$$(2+1)(2+1-1)a_2 - (2+1-2)(2+1-1)a_0 + \alpha a_0 = 0 \implies a_2 = \frac{2-\alpha}{6}a_0$$

$$(3+1)(3+1-1)a_3 - (3+1-2)(3+1-1)a_1 + \alpha a_1 = 0 \implies \alpha_3 = 0$$

$$(4+1)(4+1-1)a_4 - (4+1-2)(4+1-1)a_2 + \alpha a_2 + \beta a_0 \implies a_4 = \frac{1}{20}(12-\alpha)a_2 - \frac{1}{20}\beta a_0 = \left(\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120} - \frac{1}{20}\beta\right)a_0$$

Dakle, rješenje je:

$$u(\eta) = a_0\eta^1\left(1 + \frac{2-\alpha}{6}\eta^2 + \left(\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120} - \frac{1}{20}\beta\right)\eta^4 + \dots\right).$$

Kada su P i Q složenije, ali su $xP(x)$ i $x^2Q(x)$ analitičke (0 nije singularitet ili je regularni singularitet) onda imamo zapise:

$$xP(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad x^2Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k.$$

Definiramo funkcije:

$$f_0(r) = r^2 - (1-p_0)r + q_0, \quad f_k(r) = rp_k + q_k, \text{ za } k \geq 1.$$

Jednadžba $f_0(r) = 0$ je **indicijska jednadžba**. Neka su r_1, r_2 rješenja te jednadžbe. Ako je $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ imamo da su rješenja oblika:

$$y_{1,2}(x) = x^{r_{1,2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{1,2} x^k$$

pri čemu su koeficijenti $a_k^{1,2}$ implicitno zadani s:

$$f_0(r_{1,2}+k)a_k^{1,2} + f_1(r_{1,2}+k-1)a_{k-1}^{1,2} + \cdots + f_{k-1}(r_{1,2}+1)a_1^{1,2} + f_k(r_{1,2})a_0^{1,2} = 0$$

Ostale slučajeve nećemo promatrati.

Zadatak 2. Aproksimativno se interakcija dvaju nukleona može opisati potencijalom mezona:

$$V = \frac{Ae^{-ax}}{x}.$$

Razvijte rješenje pripadajuće Schrödingerove jednadžbe;

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E-V)\psi = 0$$

na prva tri nenul koeficijenta u ovisnosti o prvome (a_0) $(r=1)$.

Rješenje. Definirajmo $C := \frac{2m}{\hbar^2}$. Imamo $P(x) = 0$ i

$$x^2Q(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)x^2 = C(Ex^2 - Axe^{-ax}) = C(Ex^2 - Ax(1 - ax + a^2x^2/2 - a^3x^3/6 + \dots))$$

$$x^2Q(x) = -CAx + C(Aa+E)x^2 - CAa^2\frac{x^3}{2} + CAa^3\frac{x^4}{6} + \cdots + (-1)^k CAa^{k-1}\frac{x^k}{(k-1)!}$$

Sada je indicijska jednadžba $f_0(r) = r^2 - r = r(r-1)$ i $f_k(r) = q_k$. Rješavamo za $r = 1$:

$$f_0(1+1)a_1 + f_1(1+0)a_0 = 0 \implies 2a_1 + q_1a_0 = 0 \implies a_1 = \frac{CA}{2}a_0$$

$$f_0(1+2)a_2 + f_1(1+1)a_1 + f_2(1)a_0 = 0 \implies 6a_2 + q_1a_1 + q_2a_0 = 0 \implies a_2 = \frac{-q_2a_0 - q_1a_1}{6}$$

$$\implies a_2 = \frac{C^2A^2 - 2C(Aa+E)}{12}a_0.$$

Na kraju zapiši rješenje!