

# Homogene linearne ODJ s konstantnim koeficijentima

**Zadatak 1.** Nađi realna rješenja sljedećih jednačbi:

a)  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

b)  $y''' - 2y'' = 0$

*Rješenje.* a) Karakteristični polinom je

$$p(r) = r^3 - 2r^2 - r + 2 = r(r^2 - 1) - 2(r^2 - 1) = (r - 2)(r - 1)(r + 1)$$

pa je opće rješenje dano s:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

b) Karakteristični polinom je  $p(r) = r^3 - 2r^2 = r^2(r - 2)$  pa je opće rješenje dano s:

$$y(x) = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{2x} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}.$$

## Singularne točke

Generalno homogenu linearnu ODJ drugog reda možemo zapisati kao  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ . Ako za  $x_0 \in \mathbb{R}$  vrijedi  $\lim_{x \rightarrow x_0} |P(x)| = \infty$  ili  $\lim_{x \rightarrow x_0} |Q(x)| = \infty$ , kažemo da je  $x_0$  singularna ili singularitet. Kada je  $x_0$  singularna i vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |P(x)(x - x_0)| < \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |Q(x)(x - x_0)^2| < \infty$$

kažemo da je regularna. Ako ne vrijedi (jedan od dva uvjeta) onda kažemo da je  $x_0$  iregularna.

**Zadatak 2.** Pokaži da Legendreova jednačba;

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0$$

ima singularitete u točkama  $-1, 1$  i  $\infty$  te im odredi tip.

*Rješenje.* Svedimo jednačbu na kanonski oblik:

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{l(l + 1)}{1 - x^2}y = 0.$$

Očito, ima singularitete u točkama  $-1, 1$ , a za  $\infty$  koristimo supstituciju  $u = \frac{1}{x}$ :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{du} = -u^2 \frac{dy}{du}$$
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{du} \frac{du}{dx} = -u^2 \left( -2u \frac{dy}{du} - u^2 \frac{d^2 y}{du^2} \right) = 2u^3 \frac{dy}{du} + u^4 \frac{d^2 y}{du^2}$$

OVE FORMULE VRIJEDE OPĆENITO. Ako  $y(x)$  zapišemo kao  $w(u)$ , nova jednačba postaje:

$$(1 - u^{-2})(2u^3 w' + u^4 w'') - 2u^{-1}(-u^2 w') + l(l + 1)w = 0$$

tj.

$$(u^4 - u^2)w'' + 2u^3 w' + l(l + 1)w = 0 \quad \iff \quad w'' + \frac{2u}{u^2 - 1}w' + \frac{l(l + 1)}{u^2(u^2 - 1)}w = 0$$

Iz zadnjeg člana vidi se da je u  $x = \infty$  jednačba očito singularna.

Za pokazivanje tipa, korisimo supstituciju  $u = x - 1$ ,  $du = dx$ :

$$\lim_{u \rightarrow 0} -\frac{2(u + 1)}{u(u + 2)}u = -2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u + 1}{u + 2} = -1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} -\frac{l(l + 1)}{u(u + 2)}u^2 = -l(l + 1) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u + 2} = 0$$

Analogno se pokaže da je i  $x = 1$  regularna. Provjerimo još tip singularnosti za  $x = \infty$ :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u^2}{u^2 - 1} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{l(l + 1)}{u^2 - 1} = -l(l + 1).$$