# 1 Linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

## 1.1 Homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

Neka je dana homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda (u opcém obliku)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

gdje su $p(x), q(x)$ neprekidne funcije na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Prisjetimo se od prošlog puta:

**Teorem 1.1.** (o općem rješenju homogene jednadžbe 2. reda)
*Neka su $y_1, y_2$ neka dva linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe (1). Tada je opće rjšenje jednadžbe (1) oblika*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

*za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.*

### 1.1.1 Homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima

Neka je sada dana homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s *konstantnim* koeficijentima

$$ay'' + by' + c = 0, \tag{2}$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$. Definiramo **karakteristični polinom** jednadžbe (2) kao

$$ar^2 + br + c = 0.$$

**Teorem 1.2.** *Neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ nultočke karakterističnog polinoma jednadžbe (2). Tada je opće rješenje jednadžbe (2) dano sa:*

*(i) ako su $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ i $r_1 \neq r_2 \Longrightarrow y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$,*

*(ii) ako su $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ i $r_1 = r_2 \Longrightarrow y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$,*

*(iii) ako su $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$,*

*gdje su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ neke konstante.*

**Zadatak 1.3.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$2y'' - 7y' + 3y = 0.$$

*Rješenje.* Karakteristični polinom je dan sa

$$2r^2 - 7r + 3 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = 3$, $r_2 = \frac{1}{2}$. Budući da su $r_1, r_2$ različiti realni brojevi, opće rješenje jednadžbe je oblika

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x},$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$

**Zadatak 1.4.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

*te partikularno rješenje uz početni uvjet* $y(0) = 5,\ y'(0) = -3.$

*Rješenje.* Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = r_2 = 1$. Budući da su $r_1, r_2$ isti realni brojevi, opće rješenje jednadžbe je oblika

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x},$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo sada početni uvjet:

$$y(0) = 5 = C_1, \quad y'(0) = -3 = -C_1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 2,$$

pa je partikularno rješenje

$$y(x) = 5e^{-x} + 2xe^{-x}.$$

□

**Zadatak 1.5.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 4y' + 5y = 0,$$

*te partikularno rješenje uz početni uvjet* $y(0) = 1,\ y'(0) = 5.$

*Rješenje.* Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 - 4r + 5 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = 2 - i$, $r_2 = 2 + i$. Budući da su $r_1, r_2$ par kompleksno konjugiranih brojeva, opće rješenje jednadžbe je oblika

$$y(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo sada početni uvjet. Budući da je

$$y'(x) = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x),$$

imamo

$$y(0) = 1 = C_1, \quad y'(0) = 5 = 2C_1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 3,$$

pa je partikularno rješenje

$$y(x) = e^{2x} \cos x + 3e^{2x} \sin x.$$

□

## 1.2 Nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

Neka je dana nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda (u opcém obliku)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{3}$$

gdje su $p(x), q(x), f(x)$ neprekidne funcije na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Njoj pridružena homogena jednadžba je oblika

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4}$$

**Teorem 1.6.** (o općem rješenju nehomogene jednadžbe 2. reda)
*Neka je dana nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda (3). Neka su $y_1, y_2$ linearno nezavisna rješenja pridružene homogene jednadžbe (4). Tada je opće rjšenje nehomogene jednadžbe (3) oblika*

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_P(x).$$

### 1.2.1 Rješavanje nehomogene jednadžbe metodom neodređenih koeficijenata

Pretpostavimo sada da pridružena homogena jednadžba (4) ima *konstantne* koeficijente, te da je funkcija $f(x)$ (na desnoj strani jednadžbe (3)) oblika

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x), \tag{5}$$

gdje su $P_m(x), Q_n(x)$ polinomi stupnja $m$ i $n$.

Tada partikularno rješenje $y_P(x)$ nehomogene jednadžbe (3) možemo naći **metodom neodređenih koeficijenata**, tj. partikularno rješenje je oblika

$$y_P(x) = x^r e^{\alpha x}(T_k(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x), \tag{6}$$

gdje je

- $k = \max\{m, n\}$, te su $T_k(x), R_k(x)$ opći polinomi stupnja $k$, tj. oblika su

$$A_kx^k + A_{k-1}x^{k-1} + \cdots + A_1x + A_0 = 0,$$

- $r$ je kratnost nultočke $\lambda := \alpha + \beta i$ u karakterističnom polinomu pripadne homogene jednadžbe (4).

**Zadatak 1.7.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$2y'' - y' - y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$2r^2 - r + 1 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Budući da su $r_1, r_2$ različiti realni brojevi, opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x},$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Budući da je desna strana jednadžbe $f(x) = e^{2x} P_1(x)$, gdje je $P_1(x) = 4x$, partikularno rješenje će biti oblika

$$y_P(x) = e^{2x} T_1(x) = e^{2x}(Ax + B).$$

Zašto? Ovdje imamo:

- $k = \max\{1, 0\} = 1$, pa je $T_1(x)$ opći polinom prvog stupnja,
- $\alpha = 2, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 2 + 0 \cdot i$ jednaka 0 (tj. 2 nije nultočka karakterističnog polinoma).

Preostalo je izračunati koeficijente $A$ i $B$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y' &= e^{2x}(2Ax + A + 2B), \\ y'' &= e^{2x}(4Ax + 4A + 4B). \end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\begin{gathered} 2e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - e^{2x}(2Ax + A + 2B) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}, \\ e^{2x}(5Ax + 7A + 5B) = 4xe^{2x}, \\ 5Ax + 7A + 5B = 4x. \end{gathered}$$

Iz zadnje jednadžbe izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo sustav $5A = 4$, $5B + 7A = 0$, pa je $A = 4/5$, $B = -28/25$.

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(x) = e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

Prema Teoremu 1.6 je opće rješenje dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right),$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

## Zadaci za vježbu (19.3.2020.)

**Zadatak 1.8.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + 10y' + 21y = 0.$$

**Zadatak 1.9.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - y' - 2y = 4x^2.$$

**Zadatak 1.10.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

**Zadatak 1.11.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = r_2 = 1$. Budući da je $r_1 = r_2 = 1$ dvostruka realna nultočka, opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Desna strana jednadžbe je oblika $f(x) = e^x P_1(x)$, gdje je $P_1(x) = x$, te je zato:

- $k = \max\{1, 0\} = 1$, pa je $T_1(x)$ opći polinom prvog stupnja,
- $\alpha = 1, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 1 + 0 \cdot i$ jednaka 2 (tj. 1 je dvostruka nultočka karakterističnog polinoma),

dakle partikularno rješenje će biti oblika

$$y_P(x) = x^2 e^x T_1(x) = x^2 e^x (Ax + B).$$

Preostalo je izračunati koeficijente $A$ i $B$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y' &= e^x(Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx), \\ y'' &= e^x(Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B). \end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\begin{gathered} e^x(Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B) - 2e^x(Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx) + e^x(Ax^3 + Bx^2) = xe^x, \\ e^x((6A + 6B)x + 2B) = xe^x, \\ (6A + 6B)x + 2B = x. \end{gathered}$$

Iz zadnje jednadžbe izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo sustav $2B = 0$, $6A + 6B = 1$, pa je $A = 1/6$, $B = 0$.

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(x) = x^2 e^x \left( \frac{1}{6}x + 0 \right).$$

Prema Teoremu 1.6 je opće rješenje dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 1.12.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + y = x \sin x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' + y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 + 1 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Budući da je $r_1, r_2$ kompleksno konjugirani par nultočaka, opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_H(x) = C_1 e^{0\cdot x} \cos x + C_2 e^{0\cdot x} \sin x = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Desna strana jednadžbe je oblika $f(x) = x \sin x = e^{0\cdot x}(P_0(x) \cos x + Q_1(x) \sin x)$, gdje je $P_0(x) = 0$, $Q_1(x) = x$, te je zato:

- $k = \max\{1, 0\} = 1$, pa je $T_1(x), R_1(x)$ opći polinomi prvog stupnja,
- $\alpha = 0, \beta = 1$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 0 + 1 \cdot i$ jednaka 1,

dakle partikularno rješenje će biti oblika

$$y_P(x) = x^1 e^{0\cdot x}(T_1(x) \cos x + R_1(x) \sin x) = x((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x).$$

Preostalo je izračunati koeficijente $A, B, C, D$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y' &= (-Ax^2 + (2C - B)x + D) \sin x + (Cx^2 + (2A + D)x + B) \cos x, \\ y'' &= (-Ax^2 + (4C - B)x + 2A + 2D) \cos x + (-Cx^2 + (4A + D)x + 2C - 2B) \sin x. \end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\begin{gathered} (-Ax^2 + (4C - B)x + 2A + 2D) \cos x + (-Cx^2 + (4A + D)x + 2C - 2B) \sin x + \\ + (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x = x \sin x, \\ 4Cx \cos x + (2A + 2D) \cos x - 4Ax \sin x + (2C - 2B) \sin x = x \sin x. \end{gathered}$$

Iz zadnje jednadžbe izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo sustav $4C = 0$, $2A + 2D = 0$, $-4A = 1$, $2C - 2B = 0$, pa je $A = -1/4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1/4$.

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(x) = -\frac{1}{4} x^2 \cos x + \frac{1}{4} x \sin x.$$

Prema Teoremu 1.6 je opće rješenje dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{4} x^2 \cos x + \frac{1}{4} x \sin x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 1.13.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' - 4y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 - 4 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = 2$, $r_2 = -2$. Budući da su $r_1, r_2$ različite realne nultočke, opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_H(x) = C_1 e^{2\cdot x} + C_2 e^{-2\cdot x},$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Desna strana jednadžbe je oblika $f(x) = e^{2x} \sin 2x = e^{2\cdot x}(P_0(x) \cos x + Q_0(x) \sin x)$, gdje je $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, te je zato:

- $k = \max\{0, 0\} = 0$, pa su $T_0(x), R_0(x)$ opći polinomi nultog stupnja, tj. konstante,
- $\alpha = 2, \beta = 2$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 2 + 2 \cdot i$ jednaka 0, (tj. $2 + 2i$ nije nultočka karakterističnog polinoma)

dakle partikularno rješenje će biti oblika

$$y_P(x) = e^{2\cdot x}(T_0(x) \cos 2x + R_0(x) \sin 2x) = e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Preostalo je izračunati koeficijente $A, B$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y_P' &= 2e^{2x}((A + B) \cos 2x + (A - B) \sin 2x), \\ y'' &= 8e^{2x}(A \cos 2x - B \sin 2x). \end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\begin{gathered} 8e^{2x}(A \cos 2x - B \sin 2x) - 4e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x) = e^{2x} \sin 2x, \\ e^{2x}((8A - 4B) \cos 2x + (-8B - 4A) \sin 2x) = e^{2x} \sin 2x, . \end{gathered}$$

Iz zadnje jednadžbe izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo sustav $8A - 4B = 0$, $-8B - 4A = 1$, pa je $A = -1/20$, $B = -1/10$.

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(x) = -\frac{1}{20} e^{2x}(2 \cos 2x + \sin 2x).$$

Prema Teoremu 1.6 je opće rješenje dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{20} e^{2x}(2 \cos 2x + \sin 2x),$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

**Princip superpozicije rješenja**

Pretpostavimo da je naša nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda oblika

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x), \tag{7}$$

te neka su $y_{P_i}$ partikularna rješenja pojedinih jednadžbi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x),$$

za $i = 1, ..., n$. Tada je partikularno rješenje jednadžbe (7) dano sa (tzv. *princip superpozicije rješenja*)

$$y_P = y_{P_1} + ... + y_{P_n}.$$

**Zadatak 1.14.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' - y' = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 - r = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Budući da su $r_1, r_2$ različite realne nultočke, opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_H(x) = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^x = C_1 + C_2 e^x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Desna strana jednadžbe je oblika $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, gdje je $f_1(x) = 2x - 1$, $f_2(x) = -3e^x$, dakle tražimo dva partikularna rješenja $y_{P_1}$ i $y_{P_2}$.

(1) $y_{P_1}$: budući da je $f_1(x) = P_1(x)$, gdje je $P_1(x) = 2x - 1$, ovdje imamo:

- $k = \max\{1, 0\} = 1$, pa je $T_1(x)$ opći polinom prvog stupnja,
- $\alpha = 0, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 0 + 0 \cdot i$ jednaka 1, te je zato

$$y_{P_1} = xT_1(x) = x(Ax + B).$$

Preostalo je izračunati koeficijente $A$ i $B$. Vrijedi

$$y'_{P_1} = 2Ax + B,$$
$$y''_{P_1} = 2A.$$

Uvrstimo to u jednadžbu

$$y'' - y' = f_1(x) = 2x - 1,$$

i dobivamo

$$2A - (2Ax + B) = 2x - 1,$$
$$-2Ax + (2A - B) = 2x - 1.$$

Iz zadnje jednadžbe izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo da je $A = -1$, $B = -1$. Dakle, dobili smo

$$y_{P_1}(x) = -x^2 - x.$$

(2) $y_{P_2}$: budući da je $f_2(x) = e^x P_0(x)$, gdje je $P_0(x) = -3$, te je zato:

- $k = \max\{0, 0\} = 0$, pa je $T_0(x)$ opći polinom nultog stupnja, tj. konstanta,
- $\alpha = 1, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 1 + 0 \cdot i$ jednaka 1, te je zato

$$y_{P_2} = xe^x T_0(x) = Cxe^x.$$

Preostalo je izračunati koeficijent $C$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y'_{P_2} &= A(x+1)e^x, \\ y''_{P_2} &= A(x+2)e^x. \end{aligned}$$

Uvrstimo to u jednadžbu

$$y'' - y' = f_2(x) = -3e^x,$$

i dobivamo

$$\begin{gathered} A(x+2)e^x - A(x+1)e^x = -3e^x, \\ Ae^x = -3e^x, A = 3. \end{gathered}$$

Dakle, dobili smo

$$y_{P_2}(x) = -3xe^x.$$

Ukupno partikularno rješenje je

$$y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) = -x^2 - x - 3xe^x.$$

Prema Teoremu 1.6 je opće rješenje dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 + C_2 e^x - x^2 - x - 3xe^x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

## Zadaci za vježbu (26.3.2020.)

**Zadatak 1.15.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x.$$

**Zadatak 1.16.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 6y' + 25y = 2\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}.$$

**Zadatak 1.17.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + 9y = 2x\sin x + xe^{3x}.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' + 9y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 + 9 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$. Budući da je $r_1, r_2$ kompleksno konjugirani par nultočaka, opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_H(x) = C_1 e^{0\cdot x}\cos 3x + C_2 e^{0\cdot x}\sin 3x = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Desna strana jednadžbe je oblika $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, gdje je $f_1(x) = 2x\sin x$, $f_2(x) = xe^{3x}$, dakle tražimo dva partikularna rješenja $y_{P_1}$ i $y_{P_2}$.

(1) $y_{P_1}$: budući da je $f_1(x) = 2x\sin x = e^{0\cdot x}(P_0(x)\cos x + Q_1(x)\sin x)$, gdje je $P_0(x) = 0$, $Q_1(x) = 2x$, ovdje imamo:

- $k = \max\{1, 0\} = 1$, pa su $T_1(x), R_1(x)$ opći polinomi prvog stupnja,
- $\alpha = 0, \beta = 1$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 0 + 1 \cdot i$ jednaka 0, (tj. $\lambda = i$ nije nultočka karakterističnog polinoma) te je zato

$$y_{P_1} = e^{0\cdot x}(T_1(x)\cos x + R_1(x)\sin x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x.$$

Preostalo je izračunati koeficijente $A, B, C, D$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y'_{P_1} &= (Ax + B + C)\cos x + (-Cx + 2A - D)\sin x, \\ y''_{P_1} &= (-Cx + 2A - D)\cos x - (Ax + B + 2C)\sin x. \end{aligned}$$

Uvrstimo to u jednadžbu

$$y'' + 9y = f_1(x) = 2x\sin x,$$

i dobivamo

$$(-Cx + 2A - D)\cos x - (Ax + B + 2C)\sin x + 9(Ax + B)\cos x + 9(Cx + D)\sin x = 2x\sin x,$$
$$8Cx\cos x + 8Ax\sin x + (8D + 2A)\cos x + (8B + 2C)\sin x = 2x\sin x.$$

Iz zadnje jednadžbe izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo da je $A = 1/4$, $B = 0$, $C = 0$. $D = -1/16$. Dakle, dobili smo

$$y_{P_1}(x) = -\frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{4}x\sin x.$$

(2) $y_{P_2}$: budući da je $f_2(x) = xe^{3x} = e^{3x}P_1(x)$, gdje je $P_1(x) = x$, te je zato:

- $k = \max\{0, 1\} = 1$, pa je $T_1(x)$ opći polinom prvog stupnja,

- $\alpha = 3, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 3 + 0 \cdot i$ jednaka 0, (tj. $\lambda = 3$ nije nultočka karakterističnog polinoma), te je zato

$$y_{P_2} = e^{3x} T_1(x) = e^{3x}(Ax + B).$$

Preostalo je izračunati koeficijente $A, B$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y'_{P_2} &= (3Ax + 3B + A)e^{3x}, \\ y''_{P_2} &= (9Ax + 9B + 6A)e^{3x}. \end{aligned}$$

Uvrstimo to u jednadžbu

$$y'' + 9y = f_2(x) = xe^{3x},$$

i dobivamo

$$\begin{aligned} (9Ax + 9B + 6A)e^{3x} + 9(Ax + B)e^{3x} &= xe^{3x}, \\ 18Axe^{3x} + (18B + 6A)e^{3x} &= xe^{3x}, \end{aligned}$$

te dobivamo da je $A = 1/18$, $B = -1/54$, Dakle, dobili smo

$$y_{P_2}(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{54}\right).$$

Ukupno partikularno rješenje je

$$y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) = -\frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{4}x\sin x + e^{3x}\left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{54}\right).$$

Prema Teoremu 1.6 je opće rješenje dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{4}x\sin x + e^{3x}\left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{54}\right),$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 1.18.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + 4y = x\sin^2 x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' + 4y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$r^2 + 4 = 0,$$

i njegove nultočke su $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. Budući da je $r_1, r_2$ kompleksno konjugirani par nultočaka, opće rješenje homogene jednadžbe je oblika

$$y_H(x) = C_1 e^{0\cdot x}\cos 2x + C_2 e^{0\cdot x}\sin 2x = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Na prvi pogled, desna strana jednadžbe ne zadovoljava uvjet (5). Međutim, ako primijenimo trigonometrijske formule za polovični kut, dobivamo da je

$$f(x) = x\sin^2 x = x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x\cos 2x}{2}.$$

Odnosno, desna strana je sada oblika $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, gdje je $f_1(x) = \frac{x}{2}$, $f_2(x) = -\frac{x\cos 2x}{2}$, dakle tražimo dva partikularna rješenja $y_{P_1}$ i $y_{P_2}$.

(1) $y_{P_1}$: budući da je $f_1(x) = \frac{x}{2} = e^{0\cdot x}P_1(x)$, gdje je $P_1(x) = \frac{x}{2}$, ovdje imamo:

- $k = \max\{1, 0\} = 1$, pa je $T_1(x)$ opći polinom prvog stupnja,
- $\alpha = 0, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 0 + 0 \cdot i$ jednaka 0, (tj. $\lambda = 0$ nije nultočka karakterističnog polinoma) te je zato

$$y_{P_1} = e^{0\cdot x}T_1(x) = Ax + B.$$

Računamo koeficijente $A, B$:

$$y'_{P_1} = A,\ y''_{P_1} = 0.$$

Uvrstimo to u jednadžbu

$$y'' + 4y = f_1(x) = \frac{x}{2}$$

i dobivamo

$$4Ax + 4B = \frac{x}{2},$$
$$A = 1/8, B = 0.$$

Dakle, dobili smo

$$y_{P_1}(x) = \frac{1}{8}x.$$

(2) $y_{P_2}$: budući da je $f_2(x) = -\frac{x\cos 2x}{2} = e^{0\cdot x}(P_1(x)\cos 2x + Q_0(x)\sin 2x)$, gdje je $P_1(x) = \frac{x}{2}$, $Q_0(x) = 0$, te je zato:

- $k = \max\{0, 1\} = 1$, pa su $T_1(x), R_1(x)$ opći polinomi prvog stupnja,
- $\alpha = 0, \beta = 2$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 0 + 2 \cdot i$ jednaka 1, te je zato

$$y_{P_2} = e^{0\cdot x}x^1(T_1(x)\cos 2x + R_1(x)\sin 2x) = x((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x).$$

Preostalo je izračunati koeficijente $A, B, C, D$. Vrijedi

$$y'_{P_2} = (A + Cx + D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x,$$
$$y''_{P_2} = (-4Ax^2 - 4Bx + 8Cx + B + 4D)\cos 2x + (-4Cx^2 - 8Ax - 4Dx - 4B + D)\sin 2x.$$

Uvrstimo to u jednadžbu

$$y'' + 4y = f_2(x) = -\frac{x\cos 2x}{2},$$

i dobivamo

$$(-4Ax^2 - 4Bx + 8Cx + B + 4D)\cos 2x + (-4Cx^2 - 8Ax - 4Dx - 4B + D)\sin 2x +$$
$$+4x((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x) = -\frac{x\cos 2x}{2},$$
$$(8Cx + B + 4D)\cos 2x + (-8Ax - 4B + D)\sin 2x = -\frac{x\cos 2x}{2},$$

te dobivamo da je $A = 0$, $B = 0$, $C = -1/16$, $D = 0$ Dakle, dobili smo

$$y_{P_2}(x) = -\frac{1}{16}x^2 \sin 2x.$$

Ukupno partikularno rješenje je

$$y_P(x) = y_{P_1}(x) + y_{P_2}(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x.$$

Prema Teoremu 1.6 je opće rješenje dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

## Zadaci za vježbu (2.4.2020.)

**Zadatak 1.19.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 2y' + y = 4 \cos x.$$

**Zadatak 1.20.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 6y' + 25y = 50x^3 - 36x^2 - 63x + 18.$$

# 2 Linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda

## 2.1 Homogene linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda s konstantnim koeficijentima

Neka je dana homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s *konstantnim* koeficijentima

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{8}$$

gdje su $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Definiramo **karakteristični polinom** pridružen jednadžbi (8) kao

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{9}$$

Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sve različite nultočke karakterističnog polinoma (9) pridruženog jednadžbi (8) te neka su $p_1, ..., p_k$ redom njihove kratnosti.

Prisjetimo se s predavanja:

**Fundamentalni sustav rješenja**

Linearno nezavisan skup rješenja $y_1(x), ..., y_n(x)$ jednadžbe (8) (tzv. *fundamentalni sustav rješenja*) formiramo na sljedeći način:

(i) svakoj realnoj nultočki $\lambda_k$ kratnosti $p_k$ pridružimo $p_k$ rješenja jednadžbe (8) danih sa

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \ldots, x^{p_k - 1}e^{\lambda_k x},$$

(ii) svakom kompleksno konjugiranom paru nultočaka $\alpha_s \pm i\beta_s$ kratnosti $p_s$ pridružimo $2p_s$ rješenja jednadžbe (8) danih sa

$$\begin{gathered} e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x, \\ xe^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, xe^{\alpha_s x}\sin\beta_s x, \\ \vdots \\ x^{p_s-1}e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, x^{p_s-1}e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x. \end{gathered}$$

**Zadatak 2.1.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = e^x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2 = 0,$$

i njegove nultočke su $\lambda_1 = 0$ kratnosti $p_1 = 2$ i $\lambda_2 = 1$ kratnosti $p_2 = 2$. Dakle, fundamentalni sustav rješenja je

$$e^{0\cdot x}, xe^{0\cdot x}, e^x, xe^x,$$

te je opće rješenje homogene jednadžbe oblika

$$y_H(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x,$$

za neke konstante $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Desna strana jednadžbe je oblika $f(x) = e^x P_0(x)$, gdje je $P_0(x) = 1$, te je zato:

- $k = \max\{0, 0\} = 0$, pa je $T_0(x)$ opći polinom nultog stupnja, tj. konstanta,
- $\alpha = 1, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 1 + 0 \cdot i$ jednaka 2,

dakle partikularno rješenje će biti oblika

$$y_P(x) = x^2e^xT_0(x) = Ax^2e^x.$$

Preostalo je izračunati koeficijent $A$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
y_P' &= Ae^x(x^2 + 2x),\\
y_P'' &= Ae^x(x^2 + 4x + 2),\\
y_P^{(3)} &= Ae^x(x^2 + 6x + 6),\\
y_P^{(4)} &= Ae^x(x^2 + 8x + 12).
\end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu jednadžbu i dobivamo

$$Ae^x(x^2 + 8x + 12) - 2Ae^x(x^2 + 6x + 6) + Ae^x(x^2 + 4x + 2) = e^x,$$
$$2Ae^x = e^x,\ A = 1/2.$$

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(x) = \frac{1}{2}x^2e^x.$$

Opće rješenje je dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x,$$

za neke konstante $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 2.2.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = xe^x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = \lambda^2(\lambda + 1) + (\lambda + 1) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0,$$

i njegove nultočke su $\lambda_1 = -1$ kratnosti $p_1 = 2$ te $\lambda_{2,3} = \pm i$ kratnosti $p_{2,3} = 1$. Dakle, fundamentalni sustav rješenja je

$$e^{-1\cdot x}, \cos x, \sin x,$$

te je opće rješenje homogene jednadžbe oblika

$$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

za neke konstante $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Nađimo sada partikularno rješenje. Desna strana jednadžbe je oblika $f(x) = e^x P_1(x)$, gdje je $P_1(x) = x$, te je zato:

- $k = \max\{1, 0\} = 1$, pa je $T_1(x)$ opći polinom prvog stupnja,
- $\alpha = 1, \beta = 0$, pa je kratnost $r$ od $\lambda = 1 + 0 \cdot i$ jednaka 0,

dakle partikularno rješenje će biti oblika

$$y_P(x) = e^x T_1(x) = e^x(Ax + B).$$

Preostalo je izračunati koeficijent $A, B$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
y_P' &= (Ax + A + B)e^x, \\
y_P'' &= (Ax + 2A + B)e^x, \\
y_P^{(3)} &= (Ax + 3A + B)e^x.
\end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\begin{gathered}
(Ax + 3A + B)e^x + (Ax + 2A + B)e^x + (Ax + A + B)e^x + (Ax + B)e^x = xe^x, \\
4Axe^x + (6A + 4B)e^x = xe^x, \\
A = 1/4, B = -3/8.
\end{gathered}$$

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right) e^x.$$

Opće rješenje je dano sa

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right) e^x,$$

za neke konstante $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 2.3** (DZ)**.** *Odredite fundamentalni sustav rješenja jednadžbe*

$$y^{(4)} - y = 0.$$

**Zadatak 2.4** (DZ)**.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y^{(3)} + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$$

## 2.2 Nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe $n$-tog reda

Neka je dana nehomogena linearna diferencijalna jednadžba $n$-tog reda (u opcém obliku)

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \tag{10}$$

gdje su $p_0(x), \dots p_{n-1}(x), f(x)$ neprekidne funcije na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Prisjetimo se s predavanja:

**Metoda varijacije konstanti**

Neka je $y_1(x), ..., y_n(x)$ fundamentalni sustav rješenja homogene jednadžbe pridružene jednadžbi (10). Tada opće rješenje jednadžbe (10) možemo odrediti *metodom varijacije konstanti*, tj. oblika je

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x),$$

gdje funkcije $C_1(x), \dots, C_n(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) &= 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0, \\ &\vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x). \end{aligned}$$

**Zadatak 2.5.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' + y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

i njegove nultočke su $\lambda_{1,2} = \pm i$ kratnosti $r_{1,2} = 1$. Dakle, fundamentalni sustav rješenja je $\cos x, \sin x$, te je opće rješenje homogene jednadžbe oblika

$$y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Opće rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

gdje funkcije $C_1(x), C_2(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s $\sin x$ i drugu s $\cos x$, te zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
&C_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x},\\
&C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} C_2'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow C_1'(x) = -1.
\end{aligned}$$

Trebamo još izračunati funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$. Imamo:

$$\begin{aligned}
C_2(x) &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{u}\, du = \ln \sin x + K_2,\\
C_1(x) &= \int -1 \, dx = -x + K_1.
\end{aligned}$$

Opće rješenje je dano sa

$$y(x) = (-x + K_1)\cos x + (\ln \sin x + K_2)\sin x,$$

za neke konstante $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 2.6.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$xy'' + y' = x^2.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu (u standardnom obliku)

$$y'' + \frac{1}{x}y' = 0.$$

Kako ova homogena jednadžba nema konstantne koeficijente, *ne možemo tražiti njena rješenja pomoću nultočaka karakterističnog polinoma.* Zato ćemo primijeniti supstituciju $u = y'$ te dobivamo:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}, \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + \ln|C_1| = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right| \Longrightarrow u = \frac{C_1}{x}.$$

Kako je $y' = \frac{C_1}{x}$, slijedi da je $dy = C_1\frac{dx}{x}$, te je $y = \int C_1\frac{dx}{x} = C_1 \ln|x| + C_2 \cdot 1$. Dakle, fundamentalni sustav rješenja homogene jednadžbe je $\{\ln|x|, 1\}$ te opće rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x)\ln|x| + C_2(x) \cdot 1,$$

gdje funkcije $C_1(x), C_2(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned} C_1'(x)\ln x + C_2'(x) \cdot 1 &= 0, \\ C_1'(x)\frac{1}{x} + C_2'(x) \cdot 0 &= x. \end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} &C_1'(x) = -x^2 \Longrightarrow C_1(x) = -\frac{x^3}{3} + K_1, \\ &C_2'(x) = -C_1'(x)\ln|x| \Longrightarrow C_2'(x) = -x^2\ln|x|. \end{aligned}$$

Trebamo još izračunati funkciju $C_2(x)$. Imamo:

$$C_2(x) = -\int x^2 \ln|x|\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln|x| & dv = x^2\,dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = -\frac{x^3}{3}\ln x + \int \frac{x^2}{3}\,dx$$
$$= -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + K_2.$$

Opće rješenje je dano sa

$$y(x) = (-\frac{x^3}{3} + K_1)\ln|x| + (-\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + K_2),$$

za neke konstante $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 2.7** (DZ). *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

**Zadatak 2.8.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y^{(3)} + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y^{(3)} + y' = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$\lambda^3 + \lambda = 0,$$

i njegove nultočke su $\lambda_1 = 0$ kratnosti $r_1 = 1$ te $\lambda_{2,2} = \pm i$ kratnosti $r_{2,3} = 1$. Dakle, fundamentalni sustav rješenja je $\{1, \cos x, \sin x\}$.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x,$$

gdje funkcije $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x &= 0,\\
C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x &= 0,\\
C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x &= \frac{\sin x}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$$\begin{aligned}
C_1'(x) &= -\frac{\sin x}{\cos^2 x},\\
C_2'(x) &= -\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,\\
C_3'(x) &= -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x.
\end{aligned}$$

Trebamo još izračunati funkcije $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$. Imamo:

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \cos x\\ dt = -\sin x\,dx\end{array}\right| = -\int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t} + K_1 = \frac{1}{\cos x} + K_1,\\
C_2(x) &= -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \cos x\\ dt = -\sin x\,dx\end{array}\right| = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + K_2 = \ln|\cos x| + K_2,\\
C_3(x) &= -\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x\\ dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = (1+t^2)\,dx\end{array}\right| \left(\text{jer je } \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\\
&= -\int \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t^2} - 1\right) dt = \operatorname{arctg} t - t + K_3 = x - \operatorname{tg} x + K_3.
\end{aligned}$$

Opće rješenje je dano sa

$$y(x) = \frac{1}{\cos x} + K_1 + (\ln|\cos x| + K_2)\cos x + (x - \operatorname{tg} x + K_3)\sin x,$$

za neke konstante $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 2.9.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y^{(3)} - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1+e^{-x}}.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y^{(3)} - 3y'' + 2y' = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0,$$

i njegove nultočke su $\lambda_1 = 0$ kratnosti $r_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ kratnosti $r_2 = 1$, te $\lambda_3 = 2$ kratnosti $r_3 = 1$ Dakle, fundamentalni sustav rješenja je $\{1, e^x, e^{2x}\}$.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)e^x + C_3(x)e^{2x},$$

gdje funkcije $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)e^x + C_3'(x)e^{2x} &= 0,\\
C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)e^x + 2C_3'(x)e^{2x} &= 0,\\
C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)e^x + 4C_3'(x)e^{2x} &= \frac{e^x}{1+e^{-x}}.
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$$\begin{aligned}
C_1'(x) &= \frac{e^x}{2(1+e^{-x})},\\
C_2'(x) &= -\frac{1}{1+e^{-x}},\\
C_3'(x) &= \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}.
\end{aligned}$$

Trebamo još izračunati funkcije $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$. Imamo:

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int \frac{e^x}{2(1+e^{-x})}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{2(1+e^x)}\,dx = \begin{vmatrix} t = 1+e^x \\ dt = e^x\,dx \end{vmatrix} =\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t}\,dt = \frac{1}{2}(1+e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^x) + K_1,\\
C_2(x) &= -\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \begin{vmatrix} t = 1+e^x \\ dt = e^x\,dx \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln(1+e^x) + K_2,\\
C_3(x) &= \int \frac{e^{-x}}{2(1+e^{-x})}\,dx = \begin{vmatrix} t = 1+e^{-x} \\ dt = -e^{-x}\,dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x}) + K_3.
\end{aligned}$$

Opće rješenje je dano sa

$$y(x) = \frac{1}{2}(1+e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^x) + K_1 + (-\ln(1+e^x) + K_2)e^x + (-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x}))e^{2x},$$

za neke konstante $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

**Zadatak 2.10** (DZ)**.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

**Zadatak 2.11.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + 4y = \sin^2 2x.$$

*Rješenje.* Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' + 4y = 0.$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

i njegove nultočke su $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ kratnosti $r_{1,2} = 1$. Dakle, fundamentalni sustav rješenja je $\{\cos 2x, \sin 2x\}$.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x,$$

gdje funkcije $C_1(x), C_2(x)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x &= 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x &= \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{1}{2}\sin^3 2x, \\ C_2'(x) &= \frac{1}{2}\sin^2 2x \cos 2x. \end{aligned}$$

Trebamo još izračunati funkcije $C_1(x), C_2(x)$. Imamo:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int -\frac{1}{2}\sin^3 2x\, dx = -\frac{1}{2}\int \sin 2x(1-\cos^2 2x)\, dx = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \int \sin 2x \cos^2 2x\, dx\right) \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos 2x \\ dt = -2\sin 2x\, dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int t^2\, dt\right) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos^3 2x + K_1, \\ C_2(x) &= \int \frac{1}{2}\sin^2 2x \cos 2x\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 2x \\ dt = 2\cos 2x\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^2\, dt = \frac{t^3}{12} + K_2 = \frac{1}{12}\sin^3 2x + K_2, \end{aligned}$$

Opće rješenje je dano sa

$$y(x) = \left(\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos^3 2x + K_1\right)\cos 2x + \left(\frac{1}{12}\sin^3 2x + K_2\right)\sin 2x,$$

za neke konstante $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 2.12.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$t^2\frac{d^2N}{dt^2} - 2t\frac{dN}{dt} + 2N = t\ln t,$$

*ako je poznato da su dva linearno nezavisna rješenja pripadne homogene jednadžbe* $N_1(t) = t$ *i* $N_2(t) = t^2$.

*Rješenje.* Kako nam je poznat fundamentalni sustav rješenja pripadne homogene jednadžbe (u standardnom obliku)

$$N'' - \frac{2}{t}N' + \frac{2}{t^2}N = 0,$$

možemo odmah primijeniti metodu varijacije konstanti. Dakle, opće rješenje tražimo u obliku

$$N(t) = C_1(t)t + C_2(t)t^2,$$

gdje funkcije $C_1(t), C_2(t)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned} C_1'(t)t + C_2'(t)t^2 &= 0, \\ C_1'(t) \cdot 1 + 2C_2'(t)t &= \frac{1}{t}\ln t. \end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{1}{t}\ln t, \\ C_2'(x) &= \frac{1}{t^2}\ln t. \end{aligned}$$

Trebamo još izračunati funkcije $C_1(x), C_2(x)$. Imamo:

$$C_1(t) = -\int \frac{1}{t}\ln t\,dt = \begin{vmatrix} u = \ln t \\ du = \frac{1}{t}\,dt \end{vmatrix} = -\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + K_1 = -\frac{1}{2}\ln^2 t + K_1,$$

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \int \frac{1}{t^2}\ln t\,dt = \begin{vmatrix} u = \ln t & dv = \frac{1}{t^2}\,dt \\ du = \frac{1}{t}\,dt & v = -\frac{1}{t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{t}\ln t + \int \frac{1}{t^2}\,dt + K_2 \\ &= -\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t} + K_2. \end{aligned}$$

Opće rješenje je dano sa

$$N(t) = \left(-\frac{1}{2}\ln^2 t + K_1\right)t + \left(-\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t} + K_2\right)t^2,$$

za neke konstante $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 2.13** (DZ)**.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

**Zadatak 2.14** (DZ)**.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y^{(3)} + y' = \frac{1}{\cos x}.$$

# 3 Rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi pomoću redova potencija

## 3.1 Metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi razvojem u red

Neka je dana linearna diferencijalna jednadžba $n$-tog reda

$$y^{(n)}(z) + a_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + ... + a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) = 0. \tag{11}$$

Sa predavanja znamo da ako su $a_0(z), \ldots a_{n-1}(z)$ *analitičke* funcije na nekom (jednostavno povezanom) području u $\mathbb{C}$, onda za rješavanje gornje jednadžbe možemo koristiti Taylorov teorem. Odnosno, svako rješenje možemo tražiti (nakon restrikcije na realni interval $I \subseteq \mathbb{R}$) u obliku

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

te računamo koeficijente $c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ kao rješenja određenih rekurzivnih relacija.

**Zadatak 3.1.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y' + 2y = 0$$

*metodom razvoja u red.*

*Rješenje.* Opće rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Tada je

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}.$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Kako bi ova dva reda mogli zapisati pod jednim znakom sumacije, moramo pomaknuti indeks sumacije, tj. gornju jednadžbu ekvivalentno zapisujemo kao

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)c_{k+1} + 2c_k)x^k = 0.$$

Izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo da mora vrijediti $(k+1)c_{k+1} + 2c_k = 0$, za svaki $k \geq 0$. Na taj način smo dobili rekurzivnu relaciju

$$c_{k+1} = -\frac{2c_k}{k+1}$$

za koeficijente $c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_1 = -\frac{2c_0}{1},\ c_2 = -\frac{2c_1}{2} = \frac{2^2c_0}{1\cdot 2},\ c_3 = -\frac{2c_2}{2} = -\frac{2^3c_0}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{2^3c_0}{3!}, \ldots$$

Vidimo da će opći koeficijent $c_k$ biti oblika

$$c_k = (-1)^k \frac{2^k c_0}{k!}$$

(DZ Dokažite ovu tvrdnju indukcijom!), te je opće rješenje dano sa

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!} c_0 x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_0 \frac{(-2x)^k}{k!} = c_0 e^{-2x}.$$

□

**Zadatak 3.2.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + y = 0$$

*metodom razvoja u red.*

*Rješenje.* Opće rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Tada je

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

Kako bi ova dva reda mogli zapisati pod jednim znakom sumacije, moramo pomaknuti indeks sumacije, tj. gornju jednadžbu ekvivalentno zapisujemo kao

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1) c_{k+2} + c_k) x^k = 0.$$

Izjednačavanjem koeficijenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo da mora vrijediti $(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k = 0$, za svaki $k \geq 0$. Na taj način smo dobili rekurzivnu relaciju

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{(k+2)(k+1)}$$

za koeficijente $c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Iz gornje formule vidimo da će parni koeficijenti $c_k$ ovisiti o $c_0$, dok će neparni koeficijenti ovisiti o $c_1$! (Koeficijente $c_0$ i $c_1$ ne određujemo, nego ostaju kao konstante u općem rješenju.)

Odredimo prvo parne koeficijente $c_k$. Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2},\ c_4 = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!},\ c_6 = -\frac{c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{4! \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!}, \dots$$

Vidimo da će parni koeficijenti $c_{2k}$ biti oblika

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!},$$

za $k = 0, 1, 2, \dots$. (DZ Dokažite ovu tvrdnju indukcijom!),

Pogledajmo sada neparne koeficijente. prvih nekoliko članova ovog niza je:

$$c_3 = -\frac{c_1}{2 \cdot 3},\ c_5 = -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!},\ c_7 = -\frac{c_5}{6 \cdot 7} = \frac{c_1}{5! \cdot 6 \cdot 7} = \frac{c_1}{7!}, \dots$$

Vidimo da će neparni koeficijenti $c_{2k+1}$ biti oblika

$$c_{2k+1} = (-1)^k \frac{c_1}{(2k+1)!},$$

za $k = 0, 1, 2, \dots$. (DZ Dokažite ovu tvrdnju indukcijom!), te je opće rješenje dano sa

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \cos x + c_1 \sin x, \end{aligned}$$

za neke konstante $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

□

**Zadatak 3.3.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - x^2 y = 0$$

*metodom razvoja u red.*

*Rješenje.* Opće rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Tada je

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu i dobivamo

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = 0.$$

Kako bi ova dva reda mogli zapisati pod jednim znakom sumacije, moramo pomaknuti indeks sumacije, tj. gornju jednadžbu ekvivalentno zapisujemo kao

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=4}^{\infty} c_{k-4}x^{k-2} = 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{k=4}^{\infty}(k(k-1)c_k - c_{k-4})x^{k-2} = 0.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz potencije od $x$ na lijevoj i desnoj strani dobivamo da mora vrijediti $2c_2 = 0$, $6c_3 = 0$ te $k(k-1)c_k - c_{k-4} = 0$, za svaki $k \geq 4$. Na taj način smo dobili rekurzivnu relaciju

$$c_k = \frac{c_{k-4}}{k(k-1)}$$

za $k = 4, 5, 6, \ldots$. Slično kao i u prethodnom zadatku, zaključujemo da će koeficijenti oblika $c_{4k}$ ovisiti o $c_0$, koeficijenti oblika $c_{4k}$ ovisiti o $c_0$, koeficijenti oblika $c_{4k+1}$ ovisiti o $c_1$, koeficijenti oblika $c_{4k+2}$ ovisiti o $c_2$, te koeficijenti oblika $c_{4k+3}$ ovisiti o $c_3$.

Kako vrijedi da je $c_2 = 0$ i $c_3 = 0$, odmah vidimo da će koeficijenti oblika $c_{4k+2}$ i $c_{4k+3}$ biti jednaki 0, odnosno $c_{4k+2} = c_{4k+3} = 0$, za $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Odredimo prvo koeficijente oblika $c_{4k}$. Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_4 = \frac{c_0}{4 \cdot 3},\ c_8 = \frac{c_4}{8 \cdot 7} = \frac{c_0}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3},\ c_{12} = \frac{c_0}{12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}, \ldots$$

(Za razliku od prethodnih zadataka, ovdje ne možemo jednostavno odrediti zatvorenu formulu, pa ostavljamo u ovom obliku.)

Odredimo koeficijente oblika $c_{4k+1}$. Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_5 = \frac{c_1}{5 \cdot 4},\ c_9 = \frac{c_5}{9 \cdot 8} = \frac{c_1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4},\ c_{13} = \frac{c_1}{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}, \ldots$$

Opće rješenje je dano sa

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{4k}x^{4k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{4k+1}x^{4k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{4k+2}x^{4k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{4k+3}x^{4k+3} \\
&= c_0\left(1 + \frac{1}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{1}{8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}x^8 + \frac{1}{12 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3}x^{12} + \ldots\right) + \\
&+ c_1\left(x + \frac{1}{5 \cdot 4}x^5 + \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}x^9 + \frac{1}{13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}x^{13} + \ldots\right) \\
&= c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x),
\end{aligned}$$

za neke konstante $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

**Zadatak 3.4** (DZ)**.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' - 4y = 0$$

*metodom razvoja u red.*

**Zadatak 3.5** (DZ)**.** *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$y'' + y' - 2y = 0$$

*metodom razvoja u red.*

□

## 3.2 Metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi u okolini regularnog singulariteta

Prisjetimo se s predavanja: točka 0 je **regularni singularitet** jednadžbe

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0 \tag{12}$$

ako i samo ako:

- točka 0 je pol najviše prvog reda za $p(z)$ (tj. funkcija $zp(z)$ je analitička u 0) i
- točka 0 je pol najviše drugog reda za $q(z)$ (tj. funkcija $z^2q(z)$ je analitička u 0).

Pretpostavimo da je 0 regularni singularitet jednadžbe (12). Opišimo ukratko postupak rješavanja gornje jednadžbe u okolini 0.

Neka je

$$a(z) := zp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

$$b(z) := z^2q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Definiramo funkcije

$$f_0(r) = r^2 - (1 - a_0)r + b_0,$$
$$f_k(r) = ra_k + b_k, \text{ za } k \geq 1.$$

Jednadžbu

$$f_0(r) = r^2 - (1 - a_0)r + b_0 = 0$$

zovemo **indicijska jednadžba** pridružena jednadžbi (12). Neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ korijeni indicijske jednadžbe. Imamo dva slučaja:

(1) ako je $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ (tj. razlika korijena indicijske jednadžbe *nije cijeli broj*), onda imamo dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe (12) oblika

$$y_1(z) = z^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

$$y_2(z) = z^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

gdje koeficijente $c_k$ određujemo iz rekurzivne relacije

$$f_0(r+k)c_k + f_1(r+k-1)c_{k-1} + \cdots + f_{k-1}(r+1)c_1 + f_2(r)c_0 = 0; \tag{13}$$

(2) ako je $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ (tj. razlika korijena indicijske jednadžbe je *cijeli broj*), onda jedno linearno nezavisno rješenje jednadžbe (12) određujemo na isti način kao u slučaju (1), tj. oblika je

$$y_1(z) = z^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

(koeficijente $c_k$ opet određujemo iz rekurzivne relacije (13)), a drugo linearno nezavisno rješenje računamo po formuli

$$y_2(z) = \frac{d}{dr}\left[(r-r_2)y(x,r)\right]\Bigg|_{r=r_2}$$

**Zadatak 3.6.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

*u okolini točke* $x = 0$.

*Rješenje.* Provjerimo prvo je li 0 regularni singularitet ove jednadžbe. U standardnom obliku, jednadžba glasi

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0,$$

te vidimo da je 0 pol prvog reda za funkcije $p(x) = \frac{1}{2x}$ i $q(x) = \frac{1}{4x} \Longrightarrow$ dakle, 0 je regularni singularitet.

Stavimo

$$a(x) = xp(x) = \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad b(x) = x^2 q(x) = \frac{1}{4}x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Izjednačavamo koeficijente uz potencije od $x$ i dobivamo $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$ za $k \geq 1$; te $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_k = 0$ za $k \geq 2$. Sada možemo odrediti funkcije $f_k(r)$, $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&f_0(r) = r^2 - (1-a_0)r + b_0 = r^2 - \tfrac{1}{2}r,\\
&f_1(r) = ra_1 + b_1 = \tfrac{1}{4},\\
&f_k(r) = ra_k + b_k = 0, \text{ za } k \geq 2.
\end{aligned}$$

Uvrštavamo ove funkcije u rekurzivnu relaciju (13) te dobivamo

$$(r+k)(r+k-\tfrac{1}{2})c_k + \frac{1}{4}c_{k-1} = 0.$$

Na taj način smo dobili rekurziju za koeficijente $c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{4(r+k)(r+k-\frac{1}{2})}.$$

Korijeni indicijske jednadžbe

$$f_0(r) = r^2 - (1-a_0)r + b_0 = r^2 - \tfrac{1}{2}r = 0$$

su $r_1 = 0$, $r_2 = \frac{1}{2}$. Budući da je razlika korijena $r_1 - r_2 = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, određujemo linearno nezavisna rješenja po slučaju (1).

Odredimo prvo rješenje $y_1(x)$ (koje odgovara korijenu $r_1 = 0$). Dakle, u gornju rekurziju za koeficijente $c_k$ uvrštavamo $r = r_1 = 0$ te dobivamo

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{4(r_1+k)(r_1+k-\frac{1}{2})} = -\frac{c_{k-1}}{2k(2k-1)}.$$

Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_1 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2},\ c_2 = -\frac{c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!},\ c_3 = -\frac{c_2}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!}, \ldots$$

Vidimo da će opći koeficijent $c_k$ biti oblika

$$c_k = (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!}, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(DZ Dokažite ovu tvrdnju indukcijom!), te imamo

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x^0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} c_0 x^k = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{2k}}{(2k)!} = c_0 \cos x^{\frac{1}{2}}.$$

Odredimo zatim rješenje $y_2(x)$ (koje odgovara korijenu $r_2 = \frac{1}{2}$). Dakle, u gornju rekurziju za koeficijente $c_k$ uvrštavamo $r = r_2 = \frac{1}{2}$ te dobivamo

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{4(r_2 + k)(r_2 + k - \frac{1}{2})} = -\frac{c_{k-1}}{2k(2k+1)}.$$

Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_1 = -\frac{c_0}{2 \cdot 3},\ c_2 = -\frac{c_1}{4 \cdot 5} = \frac{c_0}{5!},\ c_3 = -\frac{c_2}{6 \cdot 7} = -\frac{c_0}{7!}, \ldots$$

Vidimo da će opći koeficijent $c_k$ biti oblika

$$c_k = (-1)^k \frac{c_0}{(2k+1)!}, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

(DZ Dokažite ovu tvrdnju indukcijom!), te imamo

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} c_0 x^k = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{2k+1}}{(2k+1)!} = c_0 \sin x^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle, opće rješenje je

$$y(x) = C_1 \cos x^{\frac{1}{2}} + C_2 \sin x^{\frac{1}{2}},$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 3.7.** *Nađimo opće rješenje jednadžbe*

$$8x^2 y'' + 10xy' + (x-1)y = 0$$

*u okolini točke* $x = 0$.

*Rješenje.* Provjerimo prvo je li 0 regularni singularitet ove jednadžbe. U standardnom obliku, jednadžba glasi

$$y'' + \frac{5}{4x} y' + \frac{x-1}{8x^2} y = 0,$$

te vidimo da je 0 pol prvog reda za funkciju $p(x) = \frac{5}{4x}$ i pol drugog reda za funkciju $q(x) = \frac{x-1}{8x^2}$ $\Longrightarrow$ dakle, 0 je regularni singularitet.

Stavimo

$$a(x) = xp(x) = \frac{5}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad b(x) = x^2 q(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Izjednačavamo koeficijente uz potencije od $x$ i dobivamo $a_0 = \frac{5}{4}$, $a_k = 0$ za $k \geq 1$; te $b_0 = -\frac{1}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$, $b_k = 0$ za $k \geq 2$. Sada možemo odrediti funkcije $f_k(r)$, $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}
f_0(r) &= r^2 - (1 - a_0)r + b_0 = r^2 + \tfrac{1}{4}r - \frac{1}{8}, \\
f_1(r) &= ra_1 + b_1 = \tfrac{1}{8}, \\
f_k(r) &= ra_k + b_k = 0, \text{ za } k \geq 2.
\end{aligned}$$

Uvrštavamo ove funkcije u rekurzivnu relaciju (13) te dobivamo

$$(4(r + k) - 1)(2(r + k) + 1)c_k + c_{k-1} = 0.$$

Na taj način smo dobili rekurziju za koeficijente $c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{(4(r + k) - 1)(2(r + k) + 1)}.$$

Korijeni indicijske jednadžbe

$$f_0(r) = r^2 - (1 - a_0)r + b_0 = r^2 + \tfrac{1}{4}r - \frac{1}{8} = 0$$

su $r_1 = \frac{1}{4}$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Budući da je razlika korijena $r_1 - r_2 = \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$, određujemo linearno nezavisna rješenja po slučaju (1).

Odredimo prvo rješenje $y_1(x)$ (koje odgovara korijenu $r_1 = \frac{1}{4}$). Dakle, u gornju rekurziju za koeficijente $c_k$ uvrštavamo $r = r_1 = \frac{1}{4}$ te dobivamo

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{2k(4k + 3)}.$$

Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_1 = -\frac{c_0}{2 \cdot 7}, \ c_2 = -\frac{c_1}{44} = \frac{c_0}{616}, \ c_3 = -\frac{c_2}{90} = -\frac{c_0}{55440}, \ldots$$

Imamo

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{14}x + \frac{1}{616}x^2 - \frac{1}{55440}x^3 + \ldots\right).$$

(Kako ne možemo jednostavno odrediti zatvorenu formulu za opći koeficijent $c_k$, ostavljamo u ovom obliku.)

Odredimo zatim rješenje $y_2(x)$ (koje odgovara korijenu $r_2 = -\frac{1}{2}$). Dakle, u gornju rekurziju za koeficijente $c_k$ uvrštavamo $r = r_2 = -\frac{1}{2}$ te dobivamo

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{2k(4k - 3)}.$$

Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$c_1 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2},\ c_2 = -\frac{c_1}{20} = \frac{c_0}{40},\ c_3 = -\frac{c_2}{54} = -\frac{c_0}{2160}, \dots$$

Imamo

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{40}x^2 - \frac{1}{2160}x^3 + \dots\right).$$

Dakle, opće rješenje je

$$y(x) = C_1 x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{14}x + \frac{1}{616}x^2 - \frac{1}{55440}x^3 + \dots\right) + C_2 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{40}x^2 - \frac{1}{2160}x^3 + \dots\right),$$

za neke konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. □

**Zadatak 3.8** (DZ). *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$3x^2y'' - xy' + y = 0$$

*u okolini točke* 0.

**Zadatak 3.9** (DZ). *Nađite opće rješenje jednadžbe*

$$2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0$$

*u okolini točke* 0.