# Vježbe MMF2

Fran Mišković

5. ožujka 2026.

## 1 Prve vježbe - uvod u ODJ

### 1.1 Separabilne

**Zadatak 1.** Po Kirchhoffovom zakonu, za jakost struje $I$ u RC strujnom krugu vrijedi jednadžba:

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

a) Nađi jednadžbu zatvorenog tipa za $I$ u ovisnosti o $t$.

b) Neka je kondenzator kapaciteta $C = 10,000\mu F$ napunjen pod naponom od $100V$ i neka se prazni kroz otpornik od $1M\Omega$. Kolika je jakost struje u trenutcima $t = 0s$ i $t = 100s$.

*Rješenje.* a) Jedn. je separabilna (ništa ne ovisi o struji/vremenu) pa je zapisujemo kao:

$$R\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{C} \implies R\ln|I| + C_0 = -\frac{t}{C} + C_1$$

Jednostavnije;

$$\ln|I| = -\frac{t}{RC} + C_3 \implies |I| = C_4 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Pošto $C_4$ može biti bilo što, odbacujemo apsolutnu vrijednost i imamo naš krajnji rezultat.

b) Stavljamo vrijednosti u standardne jedinice i znanstveni zapis:

$$C = 10^4\mu F = 10^{-2}F, \quad U = 10^2 V, \quad R = 1M\Omega = 10^6\Omega$$

Napon kojim punimo kondenzator biti će jednak $I_0 R$, pri čemu je $I_0$ jakost struje u trenutku $t = 0$. Stoga, imamo:

$$I(0) = I_0 = \frac{U}{R} = \frac{10^2}{10^6}A = 10^{-4}A$$

Iz prethodnog podzadatka imamo:

$$10^{-4}A = I(0) = C_4 e^{-\frac{0}{RC}} = C_4$$

pa lako računamo traženu vrijednost:

$$I(100) = 10^{-4}e^{-\frac{t}{RC}} = 10^{-4}e^{-\frac{100}{10^{-2}10^4}} = 10^{-4}e^{-1}A \approx 3.67788 \cdot 10^{-5}A$$

**Zadatak 2.** Laplaceova trasnformacija Besselove jednadžbe ($n = 0$) daje

$$(s^2+1)f'(s) + sf(s) = 0.$$

Nađi $f(s)$.

*Rješenje.* Uz oznaku $y = f(s)$ zapišimo malo ljepše našu jednadžbu:

$$(s^2+1)dy + syds = 0 \implies (s^2+1)dy = -syds.$$

I ova jednadžba je separabilna pa imamo:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{s}{s^2+1} ds \implies [u = s^2+1] \implies \ln|y| + C_0 = -\int \frac{du}{2u} = -\frac{1}{2}\ln(s^2+1) + C_1$$

Iz toga imamo:

$$y = C_2(s^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{C_2}{\sqrt{s^2+1}}$$

**Zadatak 3.** Pad populacije uzrokovan sudarom dvaju tijela opisan je jednadžbom:

$$\frac{dN}{dt} = -kN^2.$$

Pokaži da vrijedi:

$$N(t) = N_0 \left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right)^{-1}$$

pod pretpostavkom da je za $t = -\tau_0$ populacija beskonačna, pri čemu je $\tau_0 := (kN_0)^{-1}$ i $N_0 := N(0)$.

*Rješenje.* Ova jednadžba također je separabilna pa imamo:

$$\int \frac{dN}{N^2} = -k \int dt \implies \frac{1}{N} = kt + C$$

Iz danog početnog uvjeta imamo $-k\tau_0 + C = 0$, tj. $C = k\tau_0$. Dakle, traženo rješenje je:

$$N = \frac{1}{k(t+\tau_0)} = k^{-1}(t+\tau_0)^{-1} = \frac{1}{k\tau_0}\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right)^{-1} = N_0\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right)^{-1}$$

**Zadatak 4.** Stopa napretka kemijske reakcije $A + B \to C$ proporcionalna je koncentracijama reaktanata $A$ i $B$:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \alpha[A(0) - C(t)][B(0) - C(t)].$$

Uz početni uvjet $C(0) = 0$ nađi $C(t)$ kada vrijedi:

a) $A(0) \neq B(0)$

b) $A(0) = B(0)$

*Rješenje.* Neka je $a := A(0)$ i $b := B(0)$. Jednadžba je ponovno separabilna pa imamo:

$$\int \frac{dC}{(C-a)(C-b)} = \alpha \int dt$$

a) Potrebno je razlomak zapisati kao dva jednostavnija razlomka:

$$\frac{1}{(C-a)(C-b)} = \frac{k_1}{C-a} + \frac{k_2}{C-b} = \frac{(k_1+k_2)C - k_1 b - k_2 a}{(C-a)(C-b)}$$

tj. $k_1 + k_2 = 0$ i $-k_1 b - k_2 a = 1$. Rješenja ovog sustava su $k_1 = -\frac{1}{b-a}$, $k_2 = \frac{1}{b-a}$. Dakle, imamo:

$$\alpha t = \frac{1}{b-a}\int\left(-\frac{1}{C-a} + \frac{1}{C-b}\right)dC = \frac{1}{b-a}(-\ln|C-a| + \ln|C-b|) + D = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{C-b}{C-a}\right| + D$$

Početni uvjet implicira $0 = \frac{1}{b-a}\ln|\frac{b}{a}| + D$, tj. $D = -\frac{1}{b-a}\ln|\frac{b}{a}|$. Privremeno se držimo ove oznake i dobijamo:

$$e^{(-D+\alpha t)(b-a)} = \left|\frac{C-a}{C-b}\right| ?$$

b) U ovom slučaju integral je vrlo jednostavan pa imamo:

$$-\frac{1}{C-a} = \alpha t \implies C(t) = A(0) - \frac{1}{\alpha t}$$

**Zadatak 5.** Na brod dok plovi djeluje sila otpora proporcionalna $v^n$ ($n \in \mathbb{N}$), pri čemu je $v$ brzina broda. Drugi Newtonov zakon stoga implicira:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^n$$

Nađi jednadžbu za $v$ u ovisnosti o vremenu i u ovisnosti o položaju uz pretpostavke $v(t=0) = v_0$ i $x(t=0) = 0$.

*Rješenje.* Jednadžba je ponovno separabilna. Imamo:

$$\int \frac{dv}{v^n} = -\frac{k}{m}\int dt$$

U slučaju $n = 1$ imamo $\ln|v| = -\frac{k}{m}t + C$, tj. $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$. Po početnom uvjetu, $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$. Dakle;

$$x(t) = x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{dx}{dt}dt = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\,dt = -\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Kada je $n > 1$ imamo:

$$\frac{v^{1-n}}{1-n} = -\frac{k}{m}t + C$$

Zbog početnog uvjeta imamo $C = \frac{v_0^{1-n}}{1-n}$. Raspisivanjem lako dobijemo:

$$v(t) = \left(v_0^{1-n} + (n-1)\frac{k}{m}t\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

Kao i ranije:

$$x(t) = \int_0^t \left(v_0^{1-n} - (1-n)\frac{k}{m}t\right)^{\frac{1}{1-n}} dt = \begin{bmatrix} u = v_0^{1-n} + (n-1)\frac{k}{m}t \\ du = (n-1)\frac{k}{m}dt \end{bmatrix} = \frac{m}{k(n-1)}\int_{\dots}^{\dots} u^{\frac{1}{1-n}}\,du$$

$$= \frac{m}{k(n-2)}\left(v_0^{1-n} + (n-1)\frac{k}{m}t\right)^{\frac{2-n}{1-n}}.$$

**Zadatak 6.** Pokaži da je jednadžba oblika $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ separabilna uz supstituciju $u = \frac{y}{x}$.

*Rješenje.* Iz $y = ux$ imamo $dy = xdu + udx$ pa jednadžba postaje:

$$xdu + udx = dy = g(u)dx \implies xdu = (g(u) - u)dx \implies \frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

## 1.2 Egzaktne jednadžbe

**Zadatak 7.** Pokaži da je diferencijalna jednadžba oblika

$$f(x)dx + g(x)h(y)dy = 0$$

egzaktna ako i samo ako je $g$ konstantna funkcija, pri čemu $f, g, h$ nisu nul-funkcije.

*Rješenje.* Ako je $g(x) = C$ konstanta, onda $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, što nam daje dovoljan uvjet za egzaktnost. U suprotnom, neka je jednadžba egzaktna. Jer je $0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = g'(x)$, $g$ je nužno konstanta.

## 1.3 Homogene i izobarne jednadžbe

**Zadatak 8.** Riješi jednadžbu

$$(xy^2 - y)dx + xdy = 0.$$

*Rješenje.* Jednadžba je izobarna. Uz supstituciju $y = x^n v$ imamo da je stupanj prvog člana $2n + 2$, a drugog člana $n + 1$. $2n + 2 = n + 1$ vrijedi samo za $n = -1$ pa koristimo supstituciju $y = v/x$, tj. $dy = \frac{1}{x}dv - \frac{v}{x^2}dx$. Onda je jednadžba separabilna:

$$\left(\frac{v^2 - 2v}{x}\right) dx + 1dv = 0 \implies \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{v(2-v)}$$

Jer je $\frac{1}{v(2-v)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{v} + \frac{1}{2-v})$ rješenje je:

$$\ln|x| = \frac{1}{2}(\ln|v| - \ln|2-v|) + C \implies x^2 = \frac{Cv}{2-v} \implies y = \frac{2x^2}{x(x^2 + C)}$$

**Zadatak 9.** Riješi jednadžbu

$$(x^2 - y^2 e^{y/x})dx + (x^2 + xy)e^{y/x}dy = 0.$$

*Rješenje.* Jednadžba je homogena iako ima eksponencijalne članove (objašnjenje). Uz supstituciju $y = xv$, tj. $dy = vdx + xdv$ dobijamo:

$$(x^2 - x^2v^2e^v)dx + (x^2 + x^2v)e^v vdx + (x^2 + x^2v)e^v xdv = 0$$

$$(x^2 + x^2ve^v)dx + (x^3 + x^3v)e^v dv = 0 \iff (1 + ve^v)dx + x(1+v)e^v dv = 0 \iff -\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(1+v)e^v}{1 + ve^v}dv$$

Za integriranje RHS koristimo jednu neobičnu supstituciju, $u = ve^v + 1$, $du = (e^v + ve^v)dv$;

$$-\ln|x| = \int \frac{du}{u} = \ln|ve^v + 1| + C \implies x = \frac{C}{ve^v + 1} = \frac{Cx}{ye^{y/x} + 1} \implies ye^{y/x} = const.$$

## 1.4 Još zadataka

**Zadatak 10.** Riješi jednadžbu

$$x^4y^2 + (x^3 + x^5y)y' = 0.$$

*Rješenje.* Za početak, dovedimo jednadžbu u standardni oblik:

$$x^4y^2dx + (x^3 + x^5y)dy = 0.$$

Ovo je izobarna jednadžba. Uz supstituciju $y = ux^n$ imamo da je stupanj prvog člana uz $dy$ $n-1+3 = n+2$ i trećeg $5+2n-1 = 2n+4$. Jednakost $2n+4 = n+2$ vrijedi samo za $n = -2$ pa imamo $y = \frac{u}{x^2}$, tj. $dy = \frac{1}{x^2}du - \frac{2u}{x^3}dx$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$u^2dx + (x^3 + ux^3)\left(\frac{1}{x^2}du - \frac{2u}{x^3}dx\right) = (-u^2 - 2u)dx + (x + ux)du = 0 \implies \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1+u}{u^2+2u}du$$

Pojednostavljujemo razlomak:

$$\frac{1+u}{u^2+2u} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+2} = \frac{(A+B)u + 2A}{u^2+2u} \implies A + B = 1,\, 2A = 1 \implies A = B = \frac{1}{2}$$

pa je

$$\ln|x| = \frac{1}{2}(\ln|u| + \ln|u+2|) + C \implies x^2 = C\left|\frac{u}{u+2}\right|.$$

**Zadatak 11.** Riješi jednadžbu:

$$(2xye^{x^2} - e^y + \cos x)dx + (e^{x^2} - xe^y)dy = 0.$$

*Rješenje.* Provjeravamo da je jednadžba egzaktna:

$$\partial_y(2xye^{x^2} - e^y + \cos x) = 2xe^{x^2} - e^y, \quad \partial_x(e^{x^2} - xe^y) = 2xe^{x^2} - e^y$$

Sada:

$$\varphi(x,y) = \int e^{x^2} - xe^y\, dy = ye^{x^2} - xe^y + C(x)$$

što daje:

$$2xye^{x^2} - e^y + \cos x = \partial_x(ye^{x^2} - xe^y + C(x)) = 2xye^{x^2} - e^y + C'(x) \implies C(x) = \sin x + D,\, D \in \mathbb{R}$$

tj. rješenje je:

$$ye^{x^2} - xe^y + \sin x = \text{const}$$