MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2024.

Zadatak 1. *(ukupno 13 bodova)*

(a) (7 bodova) Niz (a_n) zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n^2 + 2}.$$

Konvergira li niz (a_n)? Ako konvergira, odredite mu limes.

(b) (6 bodova) Odredite sva gomilišta niza (x_n) zadanog s

$$x_n = \cos\Big(\frac{(2n^2+1)\pi}{3n}\Big).$$

Rješenje.

(a) Uočimo da za svaki n vrijedi

$$1 - a_{n+1} = 1 - \frac{2a_n + 1}{a_n^2 + 2} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n^2 + 2} \geq 0,$$

dakle niz (a_n) omeđen je odozgo s 1. Nadalje, za svaki n imamo

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + 1}{a_n^2 + 2} - a_n = \frac{1 - a_n^3}{a_n^2 + 2} \geq 0,$$

dakle niz (a_n) je rastuć. Prema tome, niz (a_n) konvergira, stoga označimo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Iz rekurzivne relacije slijedi

$$L = \frac{2L + 1}{L^2 + 2},$$

odakle rješavanjem dobivamo $L = 1$.

(b) Iz adicijskih formula imamo

$$x_n = \cos\Big(\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{3n}\Big) = \cos\Big(\frac{2n\pi}{3}\Big)\cos\Big(\frac{\pi}{3n}\Big) - \sin\Big(\frac{2n\pi}{3}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{3n}\Big).$$

Budući da je $|\sin(\frac{2n\pi}{3})| \leq 1$ te $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{3n}) = 0$, po teoremu o sendviču slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sin\Big(\frac{2n\pi}{3}\Big)\sin\Big(\frac{\pi}{3n}\Big) = 0.$$

S druge strane, kako je

$$\cos\Big(\frac{2n\pi}{3}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } n \text{ djeljiv s } 3 \\ -\frac{1}{2} & \text{inače} \end{cases}$$

te $\lim_{n\to\infty} \cos(\frac{\pi}{3n}) = 1$, dobivamo da vrijedi

$$\lim_{m\to\infty} x_{3m} = 1, \quad \lim_{m\to\infty} x_{3m+1} = \lim_{m\to\infty} x_{3m+2} = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, $-\frac{1}{2}, 1$ gomilišta su niza (x_n). Dokažimo da su to ujedno sva gomilišta. Pretpostavimo da je x gomilište od (x_n) te odaberimo podniz $(x_{p_n})_n$ koji konvergira prema x. Tada postoji $j \in \{0, 1, 2\}$ takav da p_n daje ostatak j pri dijeljenju s 3 za beskonačno mnogo n. Drugim riječima, postoji daljnji podniz $(x_{p_{q_n}})_n$ takav da $p_{q_n} \equiv j \pmod 3$ za sve n. No tada dobivamo

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{p_{q_n}} = \begin{cases} 1 & \text{ako } j = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{inače} \end{cases},$$

čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 2. *(ukupno 12 bodova)*

(a) (4 boda) Postoje li skupovi $A, B \subset \mathbb{R}$ takvi da je $\sup(A \cdot B) \neq \sup A \sup B$? Dokažite ili opovrgnite.

(b) (8 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{m^2 - mn}{2m^2 + n^2} : \; m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \right\}$$

Rješenje.

(a) Postoje. Na primjer $A = B = \{-2, -1\}$. Vrijedi $A \cdot B = \{1, 2, 4\}$ pa je $\sup\{A \cdot B\} = 4 \neq 1 = (-1) \cdot (-1) = \sup A \sup B$

(b) Za fiksni $n \in \mathbb{N}$ računamo:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m^2 - mn}{2m^2 + n^2} = \frac{1}{2}.$$

Međutim, za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{m^2 - mn}{2m^2 + n^2} \leq \frac{m^2 - mn}{2m^2} \leq \frac{m^2}{2m^2} = \frac{1}{2}.$$

Slijedi da je $\sup S = \frac{1}{2}$.

Za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{m^2 - mn}{2m^2 + n^2} = \frac{m(m - n)}{2m^2 + n^2} \geq 0.$$

Također, za $m = n = 1$ vrijedi

$$\frac{m^2 - mn}{2m^2 + n^2} = \frac{1 - 1}{2 + 1} = 0.$$

Slijedi da je $\inf S = 0$.

Zadatak 3. *(ukupno 12 bodova)*

(a) (4 boda) Postoji li konvergentan niz $(x_n)_n$ za koji niz $(\lfloor x_n \rfloor)_n$ ne konvergira?

(b) (8 bodova) Dokažite da sljedeći limes postoji i odredite ga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=n}^{2n} k^4 \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

Rješenje.

(a) Postoji. Promotrimo li niz $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, vrijedi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ali

$$\lfloor x_n \rfloor = \begin{cases} 0, & n \in 2\mathbb{N} \\ -1, & n \in 2\mathbb{N} - 1 \end{cases}$$

pa zaključujemo da niz $\lfloor x_n \rfloor$ ne konvergira.

(b) Koristimo Cesaro–Stolzov teorem. Budući da je niz $(n^4)_n$ strogo rastući i neograničen, definiramo li $a_n = \sum_{k=n}^{2n} k^4 \sin(\frac{1}{k})$ i $b_n = n^3$ i pokažemo li da postoji limes $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, tada će postojati i limes $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i oni će jednaki.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)^4 \sin(\frac{1}{2n+2}) + (2n+1)^4 \sin(\frac{1}{2n+1}) - n^4 \sin(\frac{1}{n})}{(n+1)^4 - n^4} \quad \frac{/n^3}{/n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{2}{n})^3 \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2n+2})}{\frac{1}{2n+2}} + (2+\frac{1}{n})^3 \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2n+1})}{\frac{1}{2n+1}} - n^3 \cdot \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{8+8-1}{4} = \frac{15}{4},
\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti koristili limes $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ te teoreme o limesu zbroja, produkta i kvocijenta.

Zadatak 4. *(ukupno 13 bodova)*

(a) (8 bodova) Odredite postoji li sljedeći limes i ako postoji, izračunajte ga:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-e^{\frac{1}{x^2}}\cos\frac{1}{x}\right).$$

(b) (5 bodova) Postoji li neprekidna funkcija $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ koja nije ograničena i za koju postoji limes $\lim_{x\to\infty}\sin(f(x))$?

Rješenje.

(a) Koristeći supstituciju limese s predavanja i vježbi te teorem o limesu produkta i zbroja, vrijedi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-e^{\frac{1}{x^2}}\cos\frac{1}{x}\right) &= \left|\begin{matrix} & y=\frac{1}{x} & \\ x\to\infty & \Longrightarrow & y\to 0^+\end{matrix}\right| \\ &= \lim_{y\to 0^+}\frac{1-e^{y^2}\cos y}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1-\cos y}{y^2}+\cos y\cdot\frac{1-e^{y^2}}{y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) Dokažimo da takva funkcija ne postoji. Kako funkcija nije ograničena, ona nije ograničena ili odozgo ili odozdo. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da f nije ograničena odozgo budući da u suprotnom možemo promotriti funkciju $-f$ i iskoristiti identitet $\sin(-f(x))=-\sin(f(x))$.

Označimo $f(0)=m$. Neka je $M\in\mathbb{R}$ proizvoljan realan broj za koji vrijedi $M>m$. Kako f nije ograničena odozgo, postoji $x_M\in\mathbb{R}$ takav da je $f(x_M)>M$ pa po teoremu o međuvrijednosti slijedi da funkcija na intervalu $[0,x_M]$ postiže sve vrijednosti u intervalu $[m,M]$ pa posebno znamo da je $[m,M]\subset f([0,\infty))$. Međutim, kako je $M>m$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $[m,\infty)\subset f([0,\infty))$. To posebno znači da postoje niz brojeva $(x_n)_n$ takav da je $f(x_n)=\frac{\pi}{2}+(2n+2m)\pi$ i niz brojeva $(y_n)_n$ takav da je $f(y_n)=-\frac{\pi}{2}+(2n+2m)\pi$ (naime, za svaki $n\in\mathbb{N}$ su brojevi $\pm\frac{\pi}{2}+(2n+2m)$ su veći od m).

Tvrdimo da niz $(x_n)_n$ ima strogo rastuć i neomeđen podniz. Naime, po teoremu s predavanja slijedi da on ima monoton podniz. Kad bi on imao neki padajući podniz $(x_{n_k})_k$, zbog toga što je omeđen odozdo s 0, on bi imao limes $L\geq 0$, ali tada bi zbog neprekidnosti funkcije vrijedilo:

$$+\infty>f(L)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}\frac{\pi}{2}+(2n_k+2m)\pi=+\infty,$$

što je kontradikcija. Dakle, bilo koji monoton podniz niza $(x_n)_n$ mora biti rastuć, ali kako je dodatno $f(x_m)\neq f(x_n)$ za sve $m\neq n$, zaključujemo da je i $x_m\neq x_n$, tj. svi elementi niza $(x_n)_n$ su različiti pa zaključujemo da su i svi elementi monotonog podniza različiti pa je taj podniz $(x_{n_k})_k$ strogo rastuć. Analogno se dokaže i da postoji strogo rastući i neomeđen podniz $(y_{n_k})_k$. Međutim, kako je

$$\lim_{k\to\infty}\sin(f(x_{n_k}))=\lim_{k\to\infty}\sin(\frac{\pi}{2}+(2n_k+2m)\pi)=1\neq-1=\lim_{k\to\infty}\sin(-\frac{\pi}{2}+(2n+2m)\pi)=\lim_{k\to\infty}\sin(f(y_{n_k})),$$

našli smo dva niza koja konvergiraju k $+\infty$, za koje su limesi funkcija različiti pa zaključujemo da funkcija $\sin(f(x))$ nema limes u $+\infty$.