

**HRZZ PROJEKT IP-2025-02-4569 „ISTRAŽIVANJE UPORABE REPREZENTACIJA U NASTAVI
FIZIKE I MATEMATIKE (REPRESENTATIONS)“**

Metodičke upute uz novu nastavnu sekvencu Energija

Općenite napomene

Nastavna sekvenca obuhvaća 10 nastavnih sati u kojima će se koristiti istraživački ili problemski pristup, ovisno o temi. Uključuje brojne interaktivne nastavne metode (razredna rasprava, konceptualna pitanja s karticama, izvođenje pokusa i rješavanje zadataka u malim skupinama). Interakcija potiče uključivanje učenika i promišljanje sadržaja te verbalizaciju ideja, što sve pridonosi boljem usvajanju gradiva i razvoju važnih sposobnosti.

Nastoji se prvo razviti razumijevanje osnovnih koncepata vezanih uz energiju, a potom i proceduralne aspekte u primjeni zakona očuvanja energije (ZOE). Važnu ulogu pri tome imaju novi načini njegove reprezentacije (stupčasti dijagrami energije). Za razliku od osnovnoškolskih stupčastih dijagrama energije čija je svrha bila ilustriranje ZOE, a kojima se naglasilo da je energija očuvana premda je promijenila oblik i/ili prešla s jednog tijela na druga tijela u pojedinom procesu (susrest će se u prvom satu), u srednjoj će školi primarna funkcija tih dijagrama biti da pomognu učenicima pri pisanju jednadžbe energija (van Heuvelen and Zou 2001; Etkina et al. 2014). Stoga će srednjoškolski pristup dijagramima biti detaljniji i sistematičniji nego u osnovnoj školi. Novi dijagrami energije neće se uvesti odjednom, nego će se polako uvoditi i dograđivati od drugog do osmog sata.

Osnovna struktura istraživački usmjerenog sata uvođenja novog gradiva je sljedeća:

Uvodni dio

- Uvodni problem, koji potiče učenike da iskažu svoje početne ideje i povezuje novi sadržaj s njihovim iskustvima
- Opservacijski pokus (ili video, simulacija) sa svrhom sistematičnog opažanja nove pojave ili davanja motivacije za uvođenje novog koncepta ili zakona (učenici samostalno opisuju pokus i sumiraju zaključke u par rečenica)
- Uvođenje naziva nove pojave, zakona ili koncepta i naslova sata

Središnji dio

- Postavljanje istraživačkog pitanja (jednog ili više njih) i prikupljanje učeničkih pretpostavki
- Provođenje istraživačkih pokusa (frontalno nastavnik ili učenici u skupinama)
- Analiza (provode učenici) i razredna diskusija rezultata, odgovor na istraživačko pitanje

- Formiranje matematičkog modela i diskusija

Završni dio

- provjera učeničkog razumijevanja pomoću konceptualnih pitanja, eventualni aplikacijski pokus, diskusija mogućih primjena novog gradiva, razrješavanje uvodnog problema, ako je bio ostavljen otvorenim (numerički zadaci najčešće dolaze u sljedećim satima razrade gradiva)

Pri frontalnim pokusima, koje provodi nastavnik, važno je da učenici sudjeluju pri konstatiranju opažanja ili mjerenjima te tražiti od učenika da **samostalno** u rečenici ili dvije opišu izvedeni pokus i zaključke. Nekoliko učenika pročita svoje zapise, koji se prokomentiraju. Prije istraživačkih pokusa postavlja se istraživačko pitanje, a nakon izvođenja pokusa važno je učenike potaknuti da odgovore na istraživačko pitanje.

Kod novog matematičkog modela (izraza) važno je pitati o čemu izraz govori, koja su njegova moguća ograničenja, te na kakve funkcionalne veze veličina on ukazuje.

Prva linija provjere učeničkog razumijevanja su konceptualna pitanja s ABCD karticama. Pitanje, kao i odgovore, pročita nastavnik, potakne učenike da se kratko međusobno konzultiraju, te da potom zajedno podignu kartice. Nastavnik konstatira kako su raspoređeni odgovori učenika, a potom traži obrazloženja za odgovore koji su se pojavili. Kroz raspravu obrazloženja dolazi se do točnog odgovora. Proces formiranja obrazloženja jednako je važan kao i sam točan odgovor, stoga analizi ispravnih, ali i neispravnih načina razmišljanja treba posvetiti puno pažnje. Ako svi podignu točan odgovor, svejedno treba tražiti obrazloženje i dogovoriti se oko ispravnog načina zaključivanja i obrazloženja.

U satima razrade gradiva (koji uključuju dodatna konceptualna pitanja i numeričke zadatke) koristi se problemski pristup, također uz interaktivne nastavne metode. Zadaci se rješavaju u malim skupinama, pri čemu nastavnik obilazi skupine, nadzire rad i pomaže gdje je potrebno dodatnim potpitanjima. Ukoliko se u više skupina pojavi sličan problem pri rješavanju, zaustavlja se rad u skupinama i problem se prodiskutira frontalno, a potom se nastavlja rad u skupinama.

Domaće zadaće u Geogebri

Kako je trajanje nastavne intervencije relativno kratko za razvijanje proceduralnih vještina potrebnih za rješavanje zadataka, osmišljene su domaće zadaće u Geogebri koje će učenici moći kod kuće riješiti i tako ipak malo više primijeniti znanja stečena na nastavi. Nakon prva tri sata učenici će imati po jedan ili dva lakša zadatka koja mogu riješiti na papiru te podignuti na Geogebri kako bi nastavnik imao uvid u rješenja. Učenici trebaju prethodno otvoriti račun na Geogebri pod svojim imenom i prezimenom. Od 4. sata nadalje (osim 5. sata) učenici će za domaću zadaću rješavati preostali dio listića sa zadacima koji nisu dovršili u školi. Ondje će moći

i provjeriti svoje stupčaste dijagrame energija. Nastavnici trebaju pratiti kako učenici rješavaju zadaće te ako uoče neke češće probleme raspraviti ih kratko na sljedećem satu.

1. sat: Vrste i pretvorbe energije

Energija je jedan od najvažnijih koncepata u prirodnim znanostima, a počinje se uvoditi još u nastavi fizike 7. razreda OŠ. Taj se koncept nastavlja razvijati i nadograđivati u učenju fizike u srednjoj školi – stoga se oslanjamo na učenička znanja iz osnove škole, ali ih po potrebi i obnavljamo. Na pitanje što je energija nije lako dati odgovor, posebno ne na razini srednje škole. U fizici je energija apstraktna veličina koja opisuje stanje tijela ili sustava i može se kvantificirati. U svakodnevnom neznanstvenom poimanju energija se često smatra svojevrsnim gorivom ili robom – nečime što kupujemo, plaćamo, prenosimo, trošimo. Vrlo čestu rečenicu „energija je sposobnost tijela da vrši rad“ kritizirali su brojni fizičari, jer energija nije sposobnost tijela, a niti se sva energija tijela može pretvoriti u rad. Stoga to nije definicija energije niti njen valjani opis. Energija je nužna da bi se neki procesi mogli odvijati, ali ona istovremeno nije njihov pokretač, niti mehanizam. Richard Feynman opisao je to u svom poznatom citatu na sljedeći način (Feynman et al. 1963):

„Postoji određena veličina, koju zovemo energijom, koja se ne mijenja u mnogostrukim promjenama kroz koje priroda prolazi. To je apstraktna ideja, jer predstavlja matematički princip; kaže da postoji numerička veličina koja se ne mijenja kad se nešto dogodi. Nije to opis mehanizma ili nečeg konkretnog, samo čudna činjenica da možemo izračunati neki broj, pa kad završimo s promatranjem prirode koja izvodi svoje trikove i izračunamo taj broj ponovno, on je isti.”

Iako ne možemo ponuditi neku definiciju energije, možemo potaknuti razumijevanje energije kao mjere sposobnosti tijela da izazove fizičke promjene, tj. da dovede do promjene stanja drugih tijela (Hecht 2019), te to uvesti kao kriterij posjedovanja energije. Npr. tijelo koje ima energiju moći će u nekim situacijama promijeniti stanje gibanja nekog drugog tijela ili njegov oblik, temperaturu, sastav, građu itd.

Prvi i najočitiji primjer tijela koja imaju energiju su tijela u gibanju. Kod njih se lako može demonstrirati da ona mogu pokrenuti druga tijela na gibanje ili ih deformirati, te uvesti pojam kinetičke energije. Važno je naglasiti da tijela imaju tu energiju i dok ne izazivaju nikakve promjene na drugim tijelima. Razmatranje se potom proširuje na druga tijela pa se istraživanjem uočava da energiju imaju i rastegnuti ili stisnuti elastični predmeti (elastična energija), predmeti podignuti na neku visinu od tla i Zemlja (gravitacijska energija), svi predmeti zbog svoje temperature (termička energija – ne nazivamo je toplinskom, kako je učenici ne bi miješali s topline, a kasnije će taj naziv biti zamijenjen povećanjem unutarnje energije), različita goriva (hrana, benzin, nafta, plin...) te baterija ili akumulator (kemijska energija), gradska električna mreža (električna energija), predmeti koji svijetle (emitiraju svjetlosnu energiju). Tako se mogu uvesti i nazivi različitih vrsta energije. Uvođenje svake od energija motivira se ili jednostavnim pokusom ili podsjećanjem na iskustva iz života.

Uvodi se i pojam potencijalne energije kao energije koja je posljedica međudjelovanja i zato je uvijek svojstvo barem dvaju ili više tijela - najočitiji primjer je gravitacijska energija, koja ne pripada samo podignutom tijelu, nego i Zemlji, koja to tijelo privlači. Čest je problem u nastavi da se gravitacijska energija pripisuje isključivo podignutom tijelu, što može voditi do problema pri energijskoj analizi situacija, kroz tzv. dvostruko računanje (gravitacijske energije i rada sile teže). Kod elastične potencijalne energije međudjelovanje elastičnom silom odnosi se na dijelove elastičnog tijela (npr. opruge).

Potom se učenike podsjeća na pojam unutarnje energije, koji uključuje zbroj kinetičkih energija nasumičnog gibanja čestica tijela (prethodno nazvan termičkom energijom) i potencijalnih energija tih čestica zbog njihovog međudjelovanja.

Pristup energiji u 1. satu nastavne sekvence možemo prikazati sljedećim koracima:

- Istražiti koji sve objekti imaju energiju i kako to znamo (preko kriterija posjedovanja energije (sposobnosti izazivanja promjena stanja tijela), koji treba biti naglašen), uvesti vrste energije.
- Opisati prijenose i pretvorbe energije u jednostavnijim primjerima.
- Naglasiti očuvanje energije kao najvažniji aspekt koncepta energije (ZOE), koji su učenici upoznali još u OŠ („energiju ne možemo stvoriti niti uništiti, nego samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi ili prenijeti s jednog tijela na drugo“) i vizualizirati ga u pretvorbama pomoću početnih stupčastih dijagrama.

Kako bismo naglasili i vizualizirali očuvanje energije, koristimo prvo pojednostavljene stupčaste dijagrame energije za prikaz energija u neka dva trenutka, koji su možda već bili uvedeni u OŠ. Osnovna je ideja tog prikaza da učenicima slikovito prikažemo oblike energija u primjerima, crtajući proizvoljan broj kućica u stupcima početnog trenutka, ali pazeći da u konačnom trenutku zbroj nacrtanih kućica bude jednak zbroju u početnom trenutku, čime se naglašava očuvanje energije. Pišemo nazive energija riječima iznad stupaca. Još ne uvodimo pojam sustava tijela koja promatramo nego implicitno smatramo da su sva relevantna tijela uključena u razmatranje. Razmatramo neke primjere energijskih pretvorbi iz života koji učenicima mogu biti zanimljivi (npr. benzinski i električni automobil zbog različitog omjera konačne kinetičke i termičke energije ili penjanje osobe na Sljeme, koje ukazuje da se energija iz hrane u glavnini koristi za održavanje metabolizma osobe, a malim dijelom za povećanje njene mehaničke energije).

Još jedna važna razlika između svakodnevnog poimanja energije i onog znanstvenog je naglasak na trošenju, krizi i potrebi štednje energije u društvenom kontekstu, dok je u znanstvenom kontekstu glavna ideja vezana uz energiju upravo suprotna – to je ideja očuvanja energije. Stoga će učenici možda biti zbunjeni: ako je energija očuvana, zašto imamo krizu

energije? Može se diskutirati izvore energije kroz prizmu njihove dostupnosti i iskoristivosti, kako bi učenici uočili zašto su upravo fosilni izvori energije, kao vrlo koncentrirani i lako prenosivi izvori energije, još uvijek vrlo traženi, dok obnovljivi izvori počivaju na prikupljanju većinom „rasute“ i nejednako dostupne, te time teže iskoristive, energije (vjetar, Sunčeva energija..).

2. sat: Rad – način prijenosa energije

Pojam rada uvodimo **nakon** što su uvedene vrste energije, kako bi se mogao odmah naglasiti njegov najvažniji aspekt – rad je način prijenosa energije među tijelima. Motivaciju za uvođenje rada dajemo kroz jednostavan pokus u kojemu se mirujuća kolica pogurnu rukom i počnu gibati. Kolica početno nisu imala kinetičku energiju, a kasnije je imaju. Odakle je ta energija došla? Učenici trebaju zaključiti da je energiju dala osoba koja je gurala kolica, time što je djelovala silom. Očito se u tom procesu prenijela energija s osobe na kolica i tu možemo uvesti pojam rada. Izvršeni rad upravo je jednak prenesenoj energiji. To se može opisati matematički kao:

$$W = \Delta E_{\text{tijela}} = E_2 - E_1.$$

Učenicima možda neće odmah biti evidentno da je potrebno da se tijelo pod djelovanjem sile i pomakne, kako bi bio izvršen rad, pa se može razmotriti slučaj npr. guranja zida, pri čemu sila djeluje, a nema pomaka zida. Je li izvršen rad nad zidom? Ukoliko su učenici usvojili ideju rada kao prijenosa energije, mogu se zapitati je li se promijenila energija zida zbog djelovanja sile (kriterij obavljanja rada). Budući da se zid nije pokrenuo, njegova je energija ostala nepromijenjena te možemo zaključiti da nije bilo prijenosa energije s osobe koja gura na zid.

Učenici samostalno sumiraju da je rad način prijenosa energije, koji uključuje djelovanje vanjske sile i pomak tijela zbog nje (bitno je da pomak bude na pravcu djelovanja sile ili barem jedne njene komponente). U fizici je općenito rad definiran matematički kao integral skalarnog produkta vektora sile i infinitezimalnog pomaka duž putanje tijela. Jasno je da to nije moguće direktno prenijeti u školu – potrebno je pojednostavljenje, koje će zato imati razna ograničenja. Rad se može u SŠ opisati formulom:

$$W = F \Delta x.$$

Diskutiramo i naglašavamo ograničenja ove formule: za razliku od prethodne, koja vrijedi uvijek, ova formula vrijedi samo kad je sila stalna i djeluje na pravcu pomaka, a tijelo se pomiče pravocrtno bez mijenjanja smjera. U formuli koristimo pomak, a ne put, jer je pomak vektor, dok je put skalar, te se u kasnijem istraživanju može razmatrati odnos vektora sile i vektora pomaka. Što se iznosa tiče, kod pravocrtnih gibanja bez promjene smjera, pomak i put će biti jednakih iznosa, pa se učenicima može tolerirati ako npr. u zadacima koriste $W = Fs$. Iako su pomak i sila vektori, ne uvrštavamo ih kao vektore u jednadžbu rada, što se može diskutirati s učenicima, jer

oni ponekad žele staviti vektorsku oznaku na silu, pa poneki čak zbog toga i na rad. Formula za rad (koji je skalarna veličina) uključuje samo iznose vektora sile i pomaka.

Dodatno se kratko spominje da u formulu $W = F \Delta x$, ako sila djeluje pod nekim kutom ϑ u odnosu na pomak, ne ulazi cijeli iznos sile, nego samo iznos komponente koja djeluje na pravcu pomaka ($F \cos \vartheta$). No, takvi se primjeri neće razmatrati u nastavnoj sekvenci, jer za to nema vremena.

U središnjem dijelu sata istražuje se kad je obavljeni rad pozitivan, negativan ili jednak nuli na temelju tri pokusa s kolicima (ubrzavanje, usporavanje i djelovanje silom bez pomaka). Je li rad pozitivan ili negativan može se utvrditi bilo energijskim razmatranjem (je li se energija tijela na koje je obavljen rad povećala ili smanjila), bilo razmatranjem odnosa vektora sile i pomaka tijela (je li sila na paralelnom pravcu s pomakom orijentirana kao i pomak ili suprotno od pomaka). Često se u fizici skraćeno kaže da je sila usmjerena jednako kao i pomak ili suprotno od pomaka. Svjesni smo različite uporabe pojma smjer u matematici i fizici i kontroverzi oko toga, pa preporučamo da se taj pojam koristi na način na koji se i ranije s učenicima koristio (bilo spominjanjem samo smjera ili smjera i orijentacije vektora). Potom se uvodi prikaz rada u stupčastom dijagramu za primjere ubrzavanja i usporavanja kolica – rad ne pripada niti početnom, niti konačnom trenutku, pa ga stavljamo između njih. Novost je da počinjemo identificirati tijela koja promatramo (kad govorimo o radu apsolutno je nužno reći na koje se tijelo rad obavlja) – ovime zapravo krećemo u proces postepene konstrukcije novih stupčastih dijagrama energije, koji će u potpunosti biti dovršen tek u 8. satu. Negativan rad je težak pojam za učenike i potrebno ih je dovesti do zaključka da on znači da smo tijelu **oduzeli** energiju (dok smo je pri pozitivnom radu tijelu dodali). Pomoću dijagrama pišemo i prvu jednadžbu energija, $E_{k1} + W = E_{k2}$, naglašavajući da bi negativan rad ušao u nju s negativnim iznosom, ali bez promjene predznaka ispred rada u jednadžbi.

Na kraju sata razmatra se primjer mirnog držanja knjige na ispruženoj ruci. Aspekt koji može zbunjivati učenike je činjenica da se osoba umara, premda ne obavlja rad nad knjigom. **Važno je u nastavi fizike ne povezivati obavljeni rad s osjećajem umora, nego isključivo s prijenosom energije.** Osjećaj umora nastaje zbog toga što čovjekov organizam, da bi djelovao silom, mora kontrahirati mišiće, a za to je potrebna energija, što izaziva umor. Međutim, ništa od te energije nije se prenijelo na knjigu djelovanjem sile, te je obavljeni rad nad njom jednak nuli.

3. sat: Matematički opis kinetičke i elastične energije

Na vezi $W = \Delta E$ temeljit će se puno toga u srednjoškolskoj fizici, stoga je važno da je učenici dobro usvoje i koriste kao primarnu ideju vezanu uz pojam rada. Ona će se u 3. i 4. satu koristiti tri puta kako bi se došlo do matematičkih opisa pojedinih energija. Kroz razmatranje rada potrebnog za ubrzavanje tijela iz mirovanja, prvo preko primjera s konkretnim brojevima, a potom i grafičkog prikaza stalne sile dolazi se do interpretacije površine u $F\text{-}\Delta x$ grafu kao obavljenog rada pri ubrzavanju tijela. To nije jednostavna interpretacija za učenike, jer nisu navikli

na povezivanje veličine površine s iznosom u džulima. Ipak, tumačenje površine ispod grafa stalne sile dosta je direktno uz korištenje formule $W = F\Delta x$. Općenito, za ubrzavanje tijela mase m iz mirovanja do neke brzine v , potreban je rad $W = \Delta E_k = mv^2/2$, što daje i izraz za konačnu kinetičku energiju tijela, jer je početna jednaka nuli. Od formalnog se izvoda ovog izraza odustalo zbog nedostatka vremena u nastavnoj intervenciji, a zainteresirane se učenike može uputiti na izvod u udžbeniku. Važnije je ipak da uoče da smo do izraza za kinetičku energiju došli na temelju obavljenog rada i da detaljno analiziraju o čemu dobiveni izraz govori.

Na temelju iste veze, $W = \Delta E$, uvodimo i izraz za elastičnu energiju. Učenici trebaju zaključiti da energija opruge potječe od vanjskog rada osobe koja ju je rastegnula. U kontekstu izvoda formule za elastičnu energiju razvijamo grafičku interpretaciju rada promjenljive sile, također kao površine ispod $F\Delta x$ grafa. Učenici će često imati tendenciju nekritički koristiti matematički izraz $W = F\Delta x$ za rad, ne uočavajući da nije primjeren za slučajeve u kojima sila nije stalna. Kako nemamo mogućnost korištenja integrala u srednjoj školi, jedini način da odredimo rad sile koja nije stalna jest upravo interpretacija površine ispod $F\Delta x$ grafa. Učenici iz površine samostalno izvode izraz $W = \Delta E_{ep} = kx^2/2$ za rastezanje početno nerastegnute opruge konstante k za produljenje x . Uvažavajući da je početna elastična potencijalna energija jednaka nuli, izraz daje iznos konačne elastične potencijalne energije rastegnute opruge. Procese ubrzavanja tijela ili rastezanja opruge također prikazujemo stupčastim dijagramom energije, te pišemo jednadžbe koje učvršćuju ideju da konačnu energiju dobivamo kao zbroj početne energije i rada. U dijagram smo uveli i vertikalnu isprekidanu crtu iza stupca rada, koja učenike upućuje da izjednačavaju zbroj energija lijevo i desno od te crte. Ovo je uvedeno na temelju ranijih iskustava s primjenom dijagrama kod učenika, gdje se pokazalo da im nije uvijek bilo jasno u prisutnosti rada koje energije treba zbrojiti i izjednačiti. Važno je napomenuti učenicima da vertikalna crta stoji **uvijek iza rada** i da se njen položaj ne može mijenjati u dijagramu te ih potaknuti da počnu povezivati dijagram i jednadžbu na ovim jednostavnim primjerima.

4. sat: Matematički opis gravitacijske energije. Primjena rada, kinetičke, gravitacijske i elastične energije.

Pomoću iste relacije $W = \Delta E$ (koju želimo učvrstiti time što je višestruko koristimo i naglašavamo) moguće je izvesti i izraz za gravitacijsku potencijalnu energiju. Ako podižemo tijelo pri površini Zemlje stalnom silom na tijelo, iznosom jednakom sili teži (iznosa mg), vertikalno prema gore do visine h , obavili smo rad $W = mgh$, ali ne samo nad tijelom nego nad tijelom i Zemljom. Možemo usporediti razdvajanje tijela i Zemlje pri podizanju s rastezanjem opruge, jer u oba slučaja postoji sila (premda različita) koja tijela nastoji vratiti u početni položaj. Kako na kraju tijelo miruje, zaključujemo da je taj obavljeni rad povećao gravitacijsku potencijalnu energiju sustava tijelo – Zemlja upravo za isti iznos. Ako odaberemo početnu razinu kao nultu razinu gravitacijske potencijalne energije, tada možemo dobiti izraz

$$E_{gp} = mgh,$$

kao izraz za gravitacijsku potencijalnu energiju na visini h . Uočavamo da obavljeni rad govori o promjeni gravitacijske potencijalne energije, stoga njen iznos na nekoj visini možemo odrediti jedino uz odabir nulte razine gravitacijske potencijalne energije. Proizvoljnost tog odabira može biti zbunjujuća za učenike, pa se analiziraju primjeri s različitim odabirima, kako bi uočili da odabir ne utječe na iznos promjene gravitacijske energije, a njezina je promjena ono što će nas zanimati pri energijskim razmatranjima.

Sve vrste energije koje spominjemo u 1. r. SŠ mogu se podijeliti u dva osnovna tipa: kinetičku i razne oblike potencijalne energije. Iako se pojam potencijalne energije spominje već u osnovnoj školi, njegovo je uvođenje često samo na razini nove riječi, bez jasnog sadržaja. Učenici mogu uočiti da tijelo podignuto od Zemlje ili rastegnuta opruga mogu dobiti kinetičku energiju ukoliko ih pustimo. Stoga ima smisla reći da oni zbog svog međudjelovanja imaju potencijalnu energiju (u smislu moguće kinetičke energije). Svakako valja paziti da se potencijalna energija ne naziva energijom mirovanja, jer potencijalnu energiju tijela mogu imati i dok se gibaju, a energija mirovanja je poseban pojam u fizici, koji će se uvesti tek u 4. razredu SŠ.

Ostatak 4. sata bit će posvećen rješavanju zadataka u skupinama, nakon nekoliko konceptualnih pitanja. Ti su zadaci zamišljeni kao vježba za učenike da primijene do tada usvojene nove izraze za pojedine vrste energija i rad te vezu rada i promjene energije. Važno je učenike u skupinama potaknuti na međusobnu interakciju pri rješavanju, da zajednički oblikuju rješenje, a nastavnik će pri obilasku skupina tražiti da rješenje i obrazlože, potičući svaki puta različite učenike u skupini na obrazlaganje.

5. sat: Zakon očuvanja energije

Nakon pripreme koncepta u prethodnim satima, u 5. se satu uvodi operativna verzija ZOE za SŠ kroz istraživanje pomoću PhET simulacije (skejterice na zakrivljenoj rampi). Oblik ZOE usvojen u OŠ, iako načelno ispravan, nije pogodan za primjenu u konkretnim situacijama. Primjena ovog zakona je u sadašnjoj nastavnoj praksi dosta teška učenicima, jer mu ne znaju pristupiti na sistematičan način, te se njihov pristup uglavnom svodi na memoriranje nekih čestih primjera (npr. slobodnog pada) te njihove neprimjerene generalizacije na sve situacije koje uključuju energiju. Sam iskaz ZOE, koji se nalazi u gotovo svim udžbenicima srednje škole, upućuje na pristup njegovoj primjeni preko pojma sustava, ali se najčešće u školskoj praksi ne primjenjuje dalje na taj način.

Zakon očuvanja energije u SŠ se iskazuje redovito na sljedeći način: Ukupna energija zatvorenog sustava je stalna. Ovaj bi nas iskaz upućivao na to da odaberemo sustav tijela, provjerimo je li on zatvoren, odaberemo dva trenutka za usporedbu energija sustava, pogledamo

kakve sve energije sustav ima u pojedinom trenutku te (ukoliko je sustav zatvoren) izjednačimo ukupne energije sustava u tim trenutcima. No, to se najčešće u nastavnoj praksi tako ne radi, nego se nakon iskaza ZOE posve napušta pojam sustava, te se rješavaju pojedinačni primjeri i očekuje od učenika da sami iz njih izvuku pravilo koje energije usporediti i kako, te to primijene na nove situacije. Jasno je da mnogi učenici to neće biti u stanju te će pribjegavati pogrešnim poopćenjima (npr. "kinetička energija se uvijek pretvara u potencijalnu i obratno").

Pojam sustava tijela bit će ključan za daljnju primjenu ZOE u novom pristupu, pa ga je važno pažljivo uvesti i razlikovati od referentnog sustava (u hrvatskom se jeziku nažalost koristi ista riječ za oba pojma, što može izazvati zabunu, dok npr. engleski jezik koristi posve različite izraze, *reference frame* i *system*). Sustav tijela čine tijela koja smo odabrali za promatranje (nakon što su se učenici prethodnih sati naviknuli na odabir tijela koja promatramo, sada samo tome dajemo novi naziv sustava tijela ili samo sustava). Odabir tijela je u načelu proizvoljan i neovisan o tome jesu li ili nisu odabrana tijela ikako fizički povezana, ali svaki odabir neće biti jednako povoljan za rješavanje problema. U sustav ćemo stoga uzimati tijela koja su relevantna za pojedini problem, a preporučit ćemo učenicima da uvijek uzmu i Zemlju u sustav, kako bi mogli raditi s gravitacijskom potencijalnom energijom, što im je tipično lakše nego da razmatraju vanjski rad sile teže.

Izraz „zatvoreni sustav“ je problematičan – ono što se kod nas u fizici ponekad naziva zatvorenim sustavom, kemičari (a i većina fizičara u drugim zemljama, vidi npr. Etkina et al. 2014) nazivaju izoliranim sustavom, pa smo i mi to prihvatili. Misli se na sustav koji ne izmjenjuje ni tvar ni energiju s okolinom. Zatvoreni sustav, s druge strane, ne izmjenjuje tvar, ali može izmjenjivati energiju s okolinom. Kao kriterij za izolirani sustav uzima se u mehanici da je ukupna vanjska sila na sustav jednaka nuli, jer se izmjena energije u mehanici odvija jedino putem vanjskog rada. Striktno govoreći, taj bi kriterij trebao uključivati i toplinsku izolaciju, no prijenos topline se u kontekstu mehanike još ne razmatra, pa će se taj uvjet dodati tek u kontekstu termodinamike i proširenja ZOE izmjenom topline. Uvedeno je i pitanje *Obavlja li tko rad?* uz odabir sustava kako bi učenici razmislili o tome ulazi li ili izlazi energija iz sustava. Ovo pitanje treba pomoći učenicima i da odluče **koja tijela ne uključiti u sustav**. U pilotiranoj verziji intervencije pokazalo se da učenici to nisu uvijek znali odlučiti, posebno kad se radilo o ljudima kao tijelima. Stoga ih treba uputiti da tijela koja prepoznaju kao **vršitelje rada** (netko ili nešto gura, povlači, podiže...) **ne uzimaju u sustav**, nego njihov doprinos iskažu kao vanjski rad. S druge strane, kad ljudi imaju pasivnu ulogu (npr. spuštaju se bez odgurivanja, voze se u vozilu i sl.) onda ih se može uzeti u sustav.

Uobičajeni iskaz ZOE ima još jedan problem: ne specificira što raditi ako postoji vanjski rad. Stoga je odlučeno iskaz ZOE modificirati kako bi uključio oba slučaja .

ZOE iskazujemo na sljedeći način: **Ukupna energija izoliranog sustava je stalna. Ako sustav nije izoliran, te izmjenjuje energiju s okolinom, njegova konačna energija jednaka je zbroju početne energije i energije koju sustav prima ili predaje okolini.**

Iako smo izgubili ponešto na jednostavnosti iskaza, dobili smo na njegovoj operativnosti. Oba iskaza u mehanici pokriva ista jednačba (u odsustvu trenja):

$$E_{k1} + E_{gp1} + E_{ep1} + W = E_{k2} + E_{gp2} + E_{ep2}.$$

Ako je vanjski rad jednak nuli dobivamo iskaz za izolirani sustav, koji ne izmjenjuje energiju s okolinom, a ako je različit od nule, za sustav koji je izmjenjuje (u mehanici je rad jedini način prijenosa energije). Rad ne navodimo u iskazu ZOE, kako bi iskaz bio općenitiji te primjenjiv i na druge dijelove fizike (npr. na termodinamiku, gdje će se energija moći izmjenjivati s okolinom ne samo putem rada nego i topline). Ovu jednačbu sada možemo prikazati i proširenim stupčastim dijagramom energija, u koji ćemo uključiti sve oblike mehaničke energije i rad.

Stupčasti dijagram je pomoćno sredstvo kako bi učenici lakše vizualizirali ZOE, te kako bi lakše napisali jednačbu energija, s čime često imaju problema. U mehanici će stupčasti dijagram sadržavati listu energija koje zajedno čine mehaničku energiju sustava: kinetičku, gravitacijsku potencijalnu i elastičnu potencijalnu. Korištenje dijagrama s listom energija za svaki od odabranih trenutaka olakšava učenicima prepoznavanje energija koje sustav posjeduje, a time i pisanje same jednačbe. Jednak broj „kućica“ u oba dijela dijagrama (s lijeve i s desne strane vertikalne crte) vizualizira očuvanje energije.

U osnovi se primjena ZOE može smatrati svojevrsnim knjigovodstvom, koje zahtijeva sistematičan pristup, poput vođenja financija. Kod financija moramo znati o čijem računu govorimo, u kojim trenucima, te je li bilo uplata ili isplata. Kod energije moramo znati koja tijela promatramo, u kojim trenucima te je li energija ulazila ili izlazila iz sustava. Tom analogijom možemo učenicima obrazložiti **odabire koje moraju napraviti prije crtanja dijagrama i pisanja jednačbe**:

- 1) odabir sustava (tijela čiju energiju promatramo) uz pitanje obavlja li tko rad
- 2) odabir početnog i konačnog trenutka (odabiremo one koji su zgodni za račun i relevantni za problem)
- 3) odabir nulte razine gravitacijske energije (proizvoljan, ali odabiremo onu razinu koja pojednostavljuje račun)

6. sat: Primjena ZOE bez trenja- dijagrami energije

Budući da je primjena ZOE kompleksna, u ovome se satu prvo vježba samo crtanje dijagrama (uz potrebne odabire) i pisanje jednačbe za primjere prikazane kratkim video isječcima na <https://universeandmore.com/energy>. Ova je aplikacija zgodna, jer se konstruirani dijagrami mogu i provjeriti, što učenicima daje povratnu informaciju i osjećaj postignuća. Prvi se primjer na listiću prolazi frontalno uz diskusiju s učenicima, a potom se video isječci prikazuju frontalno jedan po jedan, a učenici u skupinama zajednički crtaju dijagrame i pišu jednačbu. Kad su sve skupine nacrtale dijagram za pojedini primjer, frontalno se provjerava i diskutira ispravnost dijagrama i jednačbe. Važno je pratiti da učenici prvo rade odabire, a tek potom crtaju dijagram

i pišu jednadžbu. Oni često žele odmah crtati, no treba im pokazati da se tek uz odabire može znati je li dijagram ispravan, budući da različiti odabiri rezultiraju različitim dijagramima. Bez odabira, pak, uopće ne znamo na što se dijagram odnosi. Jednadžba treba odgovarati nacrtanom dijagramu. Aplikacija daje mogućnost promjene sustava (time i dijagrama) što rezultira nešto drugačijom jednadžbom, ali konačno istim rezultatom. Nije nužno s učenicima raditi promjene sustava (u jednom se primjeru u listiću radi jedino promjena odabira nulte razine E_{gp} da se pokaže njen utjecaj na dijagram, ali ne i na konačni rezultat), no dobro je da nastavnici isprobaju prije sata promjenu sustava u primjerima, kako bi bili spremni ukoliko se postave takva pitanja od učenika.

7. sat: Cjelovita primjena ZOE bez trenja

U ovome je satu cilj da učenici vježbaju cjelovitu primjenu ZOE bez trenja na zadacima. Rad se odvija u skupinama, ali se prije toga učenike provede frontalno i interaktivno kroz prvi primjer i uputi ih se u osnovne korake rješavanja. Koraci rješavanja vrijede za sva područja fizike, a možemo ih prikazati prilagođeno prema (Etkina et al. 2014):

- 1) **Skiciraj i označi:** U ovom se koraku učenici trebaju orijentirati u zadatku, prikazati situaciju jednostavnom skicom, bez suvišnih detalja, i na njoj označiti simbolima poznate veličine, kao i one koje treba odrediti. Također se ispisuju vrijednosti zadanih veličina.
- 2) **Fizikalno opiši i prikaži:** U ovome koraku učenici trebaju razmisliti o čemu se u zadatku radi te koji je zakon (ili više njih) prikladan za situaciju. Važno je uočiti aproksimacije koje su načinjene (npr. trenje se zanemaruje) i odabrati neki prikaz koji je prikladan za dodatni opis situacije i pomoć pri rješavanju. Općenito u fizici to može biti graf gibanja, dijagram sila ili energije, prikaz silnicama u elektromagnetizmu, p - V dijagramom u termodinamici itd. U kontekstu ZOE to će biti prikaz stupčastim dijagramom energija uz potrebne odabire.
- 3) **Matematički opiši, riješi i promisli:** Tek u ovom koraku počinje pisanje jednadžbi na temelju fizikalnog opisa, njihovo rješavanje i uvrštavanje vrijednosti veličina. Tu je važno i pretvoriti mjerne jedinice, gdje je potrebno, a dobiveni rezultat promisliti. Učenici su skloni prihvatiti bilo kakav rezultat iz kalkulatora, stoga je važno uputiti ih da promisle o njegovoj smislenosti, te mjernoj jedinici rezultata (imaju li je i je li prikladna).

Ako učenici usvoje ove korake, mogu im biti općenito od velike pomoći u rješavanju zadataka u fizici. Prvi je korak nešto što često nedostaje kod učenika, kako je uočeno i u pilotiranju intervencije – učenici imaju problema s označivanjem veličina, skice uopće ne rade i odmah pokušavaju pisati neke formule. Fizikalno promišljanje zadatka također nedostaje, a pogotovo prikaz grafom ili nekim dijagramom. Matematički je opis bez tih koraka redovito manjkav, a dobiveno rješenje se najčešće ne promišlja.

8. sat: Energijski učinak trenja

Kad su učenici savladali primjere bez trenja, može se pristupiti razmatranju primjera u kojima trenje nije zanemarivo. Eksperimentalno se istražuje u skupinama energijski učinak trenja, mjerenjem povećanja temperature nakon nekoliko prelazaka drvenog kvadra po brusnom papiru. Trenje će izazvati povećanje temperature, a time i unutarnje energije, **obaju tijela između kojih djeluje**. Stoga će biti potrebno dodati stupac povećanja unutarnje energije sustava u listu energija drugog trenutka. Time će stupčasti dijagram energija biti kompletan i učenici će ga moći primjenjivati u tom obliku za bilo koji primjer. Iako je odabir sustava, čiju energiju promatramo, u načelu proizvoljan, svi odabiri neće biti jednako povoljni u primjerima s trenjem. Kako dolazi do porasta unutarnje energije obaju tijela između kojih trenje djeluje (npr. tijela koje se giba po podlozi i same podloge) potrebno je **u sustav uzeti oba ta tijela**, kako bi se moglo numerički riješiti problem. Iako se standardno u sadašnjoj nastavnoj praksi često (pogrešno) uzima da je izraz $F_{tr} \Delta x$ iznos rada trenja na samo jedno od tih tijela, možemo pokazati da je **prava interpretacija toga izraza ukupno povećanje unutarnje energije obaju tijela**. To možemo ilustrirati stupčastim dijagramom za primjer povlačenja kvadra po horizontalnom stolu stalnom brzinom, pri čemu trenje nije zanemarivo. Iz dijagrama, koji nacrtaju u skupinama, učenici zaključuju da je sav vanjski rad osobe koja povlači kvadar silom F otišao u porast unutarnje energije kvadra i stola. Kako se kvadar giba stalnom brzinom, iznos sile trenja mora biti jednak iznosu vanjske sile F . Stoga možemo pisati:

$$\Delta U = F\Delta x = F_{tr}\Delta x$$

Ovime smo pokazali da izraz $F_{tr}\Delta x$ valja interpretirati kao zbroj porasta unutarnje energije obaju tijela između kojih djeluje trenje, u ovom slučaju kvadra i stola (van Heuvelen i Zou 2001; Swackhammer 2005; Chabay et al. 2019). Ovaj izraz **ne opisuje** rad sile trenja samo na kvadar i iz razloga što efektivni pomak hvatišta sile trenja na kvadar nije jednak ukupnom pomaku kvadra, nego je manji od njega. Trenje se može modelirati u primjeru kvadra i stola kao lijepljenje i odljepljivanje mikroskopskih izbočina na knjizi i stolu pri povlačenju kvadra, te djeluje samo dok su izbočine u kontaktu, na manjoj udaljenosti od ukupnog pomaka (Swackhammer 2005; Chabay et al. 2019). Ovo ne treba raspravljati s učenicima, osim ako ne postave pitanje zašto izraz $F_{tr}\Delta x$ ne opisuje rad sile trenja na kvadar.

Mehanizam trenja je vrlo kompliciran, stoga ne možemo znati koliko povećanja unutarnje energije otpada na jedno, a koliko na drugo tijelo, ali znamo da ukupni vanjski rad odlazi na povećanje unutarnje energije obaju tijela zajedno. Zato u primjerima koji uključuju trenje treba uzeti u sustav oba tijela između kojih djeluje trenje. Prikazuje se i utjecaj otpora sredstva, koji ima isti učinak kao i trenje, ali budući da sila otpora sredstva općenito nije stalna u izraz za povećanje unutarnje energije uvrštavamo srednju silu otpora sredstva, koju smatramo stalnom.

9. sat: Snaga i korisnost, cjelovita primjena ZOE s trenjem

U devetom se satu početno uvode još koncepti snage i korisnosti. Često je kod učenika slabo razvijeno razumijevanje koncepta snage kao brzine pretvaranja energije, koja se definira omjerom pretvorene energije i intervala vremena u kojemu se ta energija pretvorila u druge oblike (Etkina et al. 2014). Strojevi su općenito uređaji za pretvorbu energije, a važno nam je kod njih i kojom brzinom pretvaraju energiju. Stoga se razmatraju primjeri žarulja od 60 W i 100 W, kako bi učenici uočili da veća snaga znači da se više ulazne energije pretvara u druge oblike u istom vremenu (u ovom primjeru električne u svjetlosnu) što upućuje na bržu pretvorbu energije. No, nije uputno koristiti rečenice poput „snaga **je** pretvorena energija u vremenu“, jer to znači za učenike da je snaga isto što i energija, a to nije točno. Snaga je nova veličina, različita od energije - kvocijent pretvorene energije i vremena ili **brzina pretvaranja energije**.

Drugi problem vezan uz snagu je da se ona još od OŠ iskazuje kao kvocijent rada i vremena (W/t), što vrijedi samo za korisnu snagu u specijalnom slučaju pretvorbe ulazne energije u mehanički rad. Puno je bolje i ispravnije snagu općenito vezati uz pretvorbu energije ($\Delta E/\Delta t$), nego samo uz rad (žarulja npr. ne obavlja nikakav mehanički rad, ali pretvara energiju). Kod koncepta korisnosti dobro je dati primjere korisnosti uobičajenih strojeva iz svakodnevnog života i ukazati na to da su te korisnosti često vrlo niske – to ne znači da se energija kao takva gubi, nego da se pretvara u manje korisne oblike.

Učenici mogu imati poteškoća uočiti u primjerima što je uložena, a što dobivena ili korisna energija, te koju od njih uvrstiti u izraz za snagu. Ukupnu uloženu snagu možemo računati pomoću ukupno pretvorene (uložene) energije. Dobro je diskutirati s učenicima primjere u kojima mogu zaključiti da npr. električni uređaj ulazne snage 1000 W svake sekunde pretvara 1000 J ulazne električne energije u druge oblike, od čega će jedan dio biti korisna energija, dok će ostatak biti neiskoristivi oblici (najčešće povećanje unutarnje energije uključenih tijela). Korisnu snagu možemo izračunati kao kvocijent energije pretvorene u korisne oblike i pripadnog intervala vremena.

Potom se frontalno i interaktivno rješava jedan primjer ZOE s trenjem, prolazeći sve korake rješavanja, nakon čega učenici u skupinama rješavaju listić vježbajući primjenu ZOE s trenjem, kao i primjenu novih koncepata snage i korisnosti. Ovdje se mogu očekivati problemi s odabirom sustava (učenici zaboravljaju uključiti oba tijela između kojih djeluje trenje), kao i raniji problemi s crtanjem dijagrama i pisanjem jednadžbe. Učenici će možda biti skloni preskakati neke korake rješavanja, pa je važno podsjetiti ih na njih. Poneki će učenici možda biti skloni interpretirati $F_{tr}\Delta x$ kao vanjski rad sile trenja na tijelo koje se giba, pa će ih trebati podsjetiti na korektnu interpretaciju.

10.sat: Sistematizacija; Primjena ZOE s trenjem i bez trenja

U zadnjem satu nastavne sekvence o energiji potrebno je na početku sistematizirati prethodno usvojene pojmove i znanja. Cjelina Energija uključuje jako puno novih koncepata i procedura, a u ovom pristupu i novu reprezentaciju (dijagrame energija), pa je za očekivati da će se određeni koncepti od prvih sati do zadnjeg sata možda pomalo već i zaboraviti ili pomiješati.

Zato se frontalno i interaktivno s učenicima prolazi kroz tablicu sistematizacije, tražeći od njih da obrazlože pojedine odgovore i korigirajući eventualne zabune. Ovo može pomoći učenicima da organiziraju svoje znanje, te da imaju na jednom mjestu zapisane najbitnije stvari za kasnije brže prisjećanje. U tu će im se svrhu podijeliti i Pregled cjeline Energija, jer novi pristup nije pokriven u sadašnjim udžbenicima. Nakon toga se učenicima daje u skupine listić sa zadacima koji su s trenjem ili bez trenja, pomiješani, kako bi se učenici naučili snaći i prepoznati uključuje li primjer trenje ili ne.

Na kraju, iako pristup primjeni ZOE sa stupčastim dijagramima energije nije uobičajen u našoj školskoj praksi, može se naći u stranim udžbenicima (Etkina et al. 2014). Stupčasti dijagrami energije su pomoćno sredstvo za snalaženje u problemu i pisanje jednadžbe, stoga se mogu izostaviti jednom kada učenici steknu dovoljno iskustva i vještine s rješavanjem problema koji uključuju ZOE. Treba napomenuti da je ovakav pristup izvrsna priprema za termodinamiku, koja dolazi početkom 2. razreda i koja traži poznavanje pojmova sustava i okoline, povećanja unutarnje energije, te pozitivnog i negativnog rada na sustav. Ukoliko se ovaj pristup ZOE razvije u mehanici, prijelaz na I. zakon termodinamike (koji je također primjer ZOE) bit će vrlo prirodan i jednostavan.

Istraživanja ukazuju na to da primjena višestrukih reprezentacija, a osobito stupčastih dijagrama energije, može povećati sposobnost studenata da se snađu u primjerima s primjenom ZOE te ih riješe bitno uspješnije nego standardnim pristupom (van Heuvelen i Zou 2001). Naša nova nastavna sekvenca želi to istražiti na učenicima srednje škole, u našim školskim uvjetima, kako bi se eksperimentalno provjerila izvedivost i učinkovitost tog pristupa u odnosu na standardno poučavanje o energiji.

Neke učeničke poteškoće vezane uz energiju

Glavne učeničke i studentske poteškoće sa ZOE i pripadnim konceptima utvrđene u istraživanjima uključuju sljedeće (ovdje navedeno vrlo sažeto):

- **koncept rada** – zaključuju o obavljenom radu na temelju osjećaja napora/umora, ograničavaju rad samo na živa bića, ne razumiju ograničenja formule za rad, ne razumiju rad kao način prijenosa energije (Swackhammer 2005); ne povezuju rad s promjenom ukupne energije sustava, a kod djelovanja više sila smatraju da je ukupni rad određen rezultatnom silom (npr. kod rastezanja opruge dvjema jednakim suprotnim silama smatraju da je ukupni rad na oprugu jednak nuli) (Lindsey et al. 2009)
- **gravitacijska potencijalna energija** – smatraju je svojstvom jednog tijela (Lindsey et al. 2012; Chabay et al. 2019) ili energijom koju tijelo ima isključivo dok miruje, ne odabiru nultu razinu E_{gp} u zadacima ili je mijenjaju u istom problemu, nultu razinu smatraju jednom točkom ili tijelom

- **odabir sustava** – ne razumiju da odabir sustava utječe na analizu energija i/ili smatraju da je energija bilo kojeg sustava stalna te ne uočavaju da se svaka skupina tijela može tretirati kao sustav (Lindsey et al. 2012),
- **primjena ZOE** – zbog tipično nesustavnog pristupa primjeni ZOE u nastavi imaju velikih poteškoća s pisanjem jednadžbe ZOE (van Heuvelen i Zou 2001), kod otvorenih sustava ne znaju s koje strane jednadžbe napisati rad, a s koje $F_{tr}\Delta x$, svode ZOE na pogrešne generalizacije nekih tipičnih primjera, poput „kinetička energija se uvijek pretvara u potencijalnu i obratno“, dvostruko uračunavaju neke članove, poput rada sile teže i gravitacijske potencijalne energije (Lindsey et al. 2012)

Reference

Feynman, Richard P.; Leighton, Robert B.; Sands, Matthew L. (1963): The Feynman lectures on physics. Reading, Mass., London: Addison-Wesley.

Lindsey, Beth A.; Heron, Paula R. L.; Shaffer, Peter S. (2009): Student ability to apply the concepts of work and energy to extended systems. American Journal of Physics 77 (11), 999–1009. DOI: 10.1119/1.3183889.

Swackhammer, Greg (2005): Making work work. Dostupno online na <http://modeling.asu.edu/modeling/MakingWorkWork.pdf>.

van Heuvelen, A.; Zou, X. L. (2001): Multiple representations of work-energy processes. American Journal of Physics 69 (2), 184–194.

Chabay, Ruth; Sherwood, Bruce; Titus, Aaron (2019): A unified, contemporary approach to teaching energy in introductory physics. American Journal of Physics 87 (7), 504–509. DOI: 10.1119/1.5109519.

Chabay, Ruth W.; Sherwood, Bruce A. (2015): Matter & interactions. Fourth edition. Hoboken NJ: John Wiley & Sons.

Etkina, Eugenia; Gentile, Michael J.; van Heuvelen, Alan (2014): College physics. Boston: Pearson Education.

Hecht, Eugene (2019): Understanding energy as a subtle concept: A model for teaching and learning energy. American Journal of Physics 87 (7), pp. 495–503. DOI: 10.1119/1.5109863.

Lindsey, Beth A.; Heron, Paula R. L.; Shaffer, Peter S. (2012): Student understanding of energy: Difficulties related to systems. American Journal of Physics 80 (2), pp. 154–163. DOI: 10.1119/1.3660661.