

HRZZ PROJEKT IP-2025-02-4569 „ISTRAŽIVANJE UPORABE REPREZENTACIJA U NASTAVI FIZIKE I MATEMATIKE (REPRESENTATIONS)“

MATERIJALI ZA NASTAVNU SEKVENCU O ENERGIJI

NASTAVNA PRIPREMA 3: MATEMATIČKI OPIS KINETIČKE I ELASTIČNE ENERGIJE

Obrazovni ishodi:

FIZ SŠ D.1.5. Primjenjuje zakon očuvanja energije.

FIZ SŠ D.1.8. Rješava fizičke probleme.

FIZ SŠ D.1.9. Istražuje fizičke pojave.

- Matematički opisuje i analizira kinetičku i elastičnu energiju
- Prikazuje kinetičku i elastičnu energiju u stupčastom dijagramu energija
- Zaključuje kvalitativno o kinetičkoj i elastičnoj energiji
- Tumači i određuje rad kao površinu u $F\text{-}\Delta x$ dijagramu
- Kvalitativno zaključuje o radu
- Primjenjuje proporcionalno zaključivanje
- Razvija ideje o prirodi znanosti (razvoj koncepta potencijalne energije)

Očekivanja međupredmetnih tema:

- osr B.4.2. Suradnički uči i radi u timu.
- D.4/5.2. Suradnja s drugima. Učenik ostvaruje dobru komunikaciju s drugima, uspješno surađuje u različitim situacijama i spreman je zatražiti i ponuditi pomoć.
- pod B.4.2. Planira i upravlja aktivnostima.
- B.4.1.A Odabire primjerene odnose i komunikaciju.
- uku B.4./5.1. Planiranje. Učenik samostalno određuje ciljeve učenja, odabire pristup učenju te planira učenje.

TIJEK SATA

Uvodni dio

UP: Često čujemo o sudarima vozila u prometu i posljedicama koje oni imaju. Što mislite, kako utječe kinetička energija koju vozilo ima prije sudara na posljedice sudara?

Učenici zaključuju da veća kinetička energija redovito znači i teže posljedice sudara.

Bit će nam važno da možemo odrediti kinetičku energiju tijela. O čemu bi ona mogla ovisiti?

Učenici daju svoje ideje: pored brzine, diskutira se i moguća ovisnost o masi tijela. Veća brzina uz istu masu dat će veću energiju, dok veća masa uz jednake brzine, također znači veću energiju.

Pokus 1: Promotrimo ponovno pokus s guranjem kolica iz mirovanja. Kolica početno nemaju kinetičku energiju, a konačno je imaju. Odakle je došla ta energija?

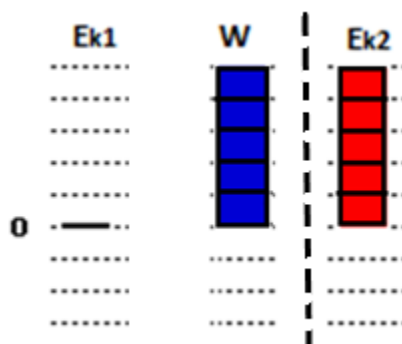
Učenici zaključuju da je došla iz obavljenog rada osobe koja ih je gurala.

Sjetimo se kako smo to opisali prošli sat pomoću stupčastog dijagrama (projicira se dijagram i diskutira njegovo značenje).

Tijelo koje promatramo: kolica

Početni trenutak: kolica miruju

Konačni trenutak: kolica se gibaju



Kako biste matematički zapisali vezu prikazanih energija iz dijagrama?

Učenici predlažu zapis $E_{k1} + W = E_{k2}$. Uočavaju da je to ekvivalentno ranijem izrazu $W = \Delta E$, primijenjenom na kinetičku energiju: $W = \Delta E_k$.

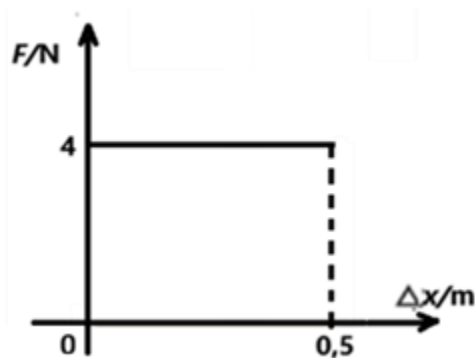
Što nam onda treba da bismo odredili konačnu kinetičku energiju kolica u ovome primjeru?

Učenici zaključuju da nam je potreban iznos obavljenog rada, jer je početna kinetička energija jednaka nuli, $W = E_{k2}$.

Središnji dio

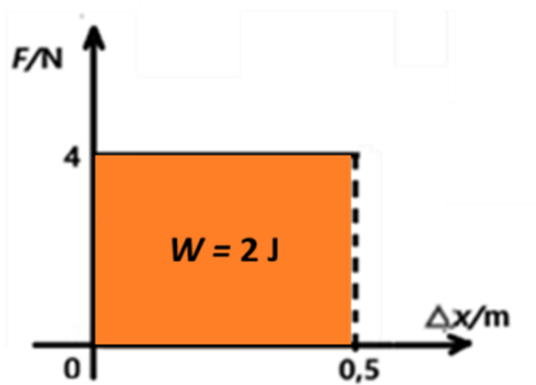
Kako matematički opisati kinetičku energiju?

Možemo odrediti kinetičku energiju, ako odredimo iznos rada koji smo obavili nad kolicima. Najlakše bi bilo odrediti iznos toga rada, ako bismo znali konkretan iznos sile koja je djelovala na kolica i iznos pripadnog pomaka kolica. To bismo mogli i grafički prikazati. Kako bi izgledao graf stalne sile u ovisnosti o pomaku? (Crtaj se ili projiciraj, te diskutiraj, primjer grafa stalne sile)



Kako biste izračunali obavljeni rad? Što uočavate, kako možemo grafički prikazati rad pri djelovanju vanjske sile?

Učenici računaju rad $W = F\Delta x = 2 \text{ J}$, te ih vodimo do zaključka da je površina ispod grafa stalne sile pravokutnik stranica F i Δx , pa je iznos te površine upravo jednak iznosu obavljenoga rada na tijelo.



Kolika bi u ovom primjeru bila konačna kinetička energija kolica, koja su početno mirovala?

Učenici zaključuju da bi bila jednaka upravo izvršenom radu, odnosno $E_k = 2 \text{ J}$.

Ovdje smo rad odredili na konkretnom primjeru, no moguće je izvesti općeniti izraz za obavljeni rad pri djelovanju stalne rezultantne sile na tijelo mase m , koje se zbog toga iz mirovanja ubrza do konačne brzine v . Pokazuje se da taj rad općenito iznosi $W = mv^2/2$. Kako bi onda glasila općenita formula za kinetičku energiju?

Učenici zaključuju da je $E_k = mv^2/2$.

O čemu ovaj izraz govori? O kojim veličinama i kako ovisi kinetička energija tijela? Usporedite to sa svojim ranijim pretpostavkama.

Učenici analiziraju dobiveni izraz i uočavaju proporcionalnost kinetičke energije s masom tijela, ali i s kvadratom brzine tijela. Potom odgovaraju pomoću kartica na konceptualno pitanje.

1. Ako tijelu, koje se giba, utrostručimo brzinu, kako će se promijeniti njegova kinetička energija?

- A) Smanjit će se 3 puta.
- B) Smanjit će se 9 puta.
- C) Povećat će se 3 puta.
- D) Povećat će se 9 puta.

Učenike se potiče da ne uvrštavaju brojeve ili izraze u izraz za energiju nego da zaključuju preko funkcionalne veze veličina. Proporcionalnost podrazumijeva promjene veličina u istom smjeru (obje istovremeno rastu ili se smanjuju jednak broj puta). Ako se brzina povećala tri puta, kvadrat brzine se povećao devet puta, a kako je kinetička energija proporcionalna kvadratu brzine i ona će se povećati devet puta.

Pokus 2: Promotrimo pokus u kojemu početno imamo nerastegnutu oprugu, pričvršćenu jednim krajem za stalak a potom je jednoliko rastegnemo djelujući silom na drugome kraju. Što opažate? Kakvu energiju ima opruga početno, a kakvu konačno?

Učenici opažaju da je opruga početno nerastegnuta, a konačno rastegnuta. Početno nema elastičnu energiju, a konačno je ima.

Odakle je opruga dobila elastičnu energiju? Kratko opišite pokus i zaključak.

Nekoliko učenika pročita svoje zapise. Zaključuje se ponovno da je opruga dobila elastičnu energiju na račun vanjskog rada osobe koja ju je rastezala.

Kako bismo mogli odrediti iznos elastične energije opruge? O čemu bi ona mogla ovisiti?

Učenici zaključuju da je početno elastična energija jednaka nuli, te je potrebno odrediti obavljeni rad da dođemo do izraza za elastičnu energiju. Daju pretpostavke i diskutiraju da bi ona mogla ovisiti o produljenju opruge, ali i o njenoj čvrstoći. Što je veće produljenje, bit će veća i energija za jednake opruge, ali ako je opruga čvršća (veći k) očekujemo veću energiju za jednako produljenje.

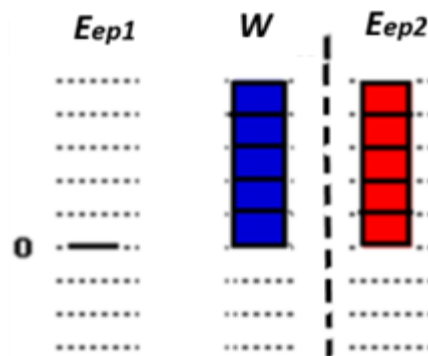
Kako biste prikazali rastezanje opruge u stupčastom dijagramu energija? Nacrtajte ga.

Učenici u grupama crtaju dijagram, koji se onda frontalno diskutira.

Tijelo koje promatramo: opruga

Početni trenutak: opruga je nerastegnuta

Konačni trenutak: opruga je rastegnuta i miruje



Kako biste matematički zapisali vezu prikazanih energija iz dijagrama?

Učenici predlažu zapis $E_{ep1} + W = E_{ep2}$. Uočavaju da je to ekvivalentno ranijem izrazu $W = \Delta E$, primijenjenom na elastičnu energiju: $W = \Delta E_{ep}$.

Kako matematički opisati elastičnu energiju?

Učenici predlažu određivanje obavljenog rada, jer je $W = E_{ep2}$.

Koliki je bio iznos sile kojom smo oprugu jednoliko rastezali?

Vanjska sila kojom smo rastezali oprugu i izvršili rad nad njom bila je iznosom jednaka elastičnoj sili, ali suprotno orijentirana od nje.

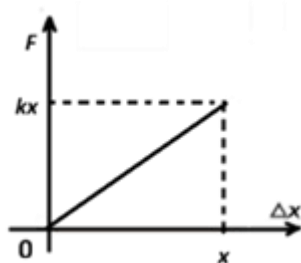
Kako matematički zapisati iznos vanjske sile u ovisnosti o produljenju opruge?

$$F_v = kx$$

Je li sila kojom smo rastezali oprugu bila stalna? Možemo li primijeniti formulu za rad za tu silu?

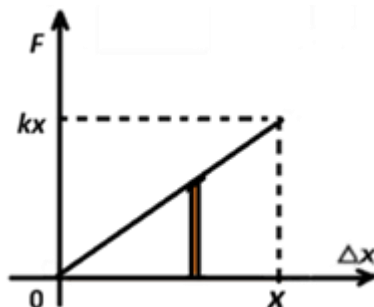
Ovdje učenici uočavaju problem: sila kojom smo rastezali oprugu nije bila stalna. Ona je proporcionalna produljenju opruge od nerastegnuto stanja (x), što znači da joj se iznos stalno povećavao tijekom rastezanja. Formula za rad $W = F \cdot \Delta x$ **nije primjenjiva** za slučaj kada sila nije stalna, stoga moramo naći drugi način da odredimo iznos obavljenoga rada na oprugu.

Pomoći će nam grafički prikaz. Prikažimo grafički promjenjivu vanjsku silu pri rastezanju opruge u ovisnosti o pomaku njenog kraja.



Pomak (Δx) kraja opruge koji rastežemo upravo je jednak produljenju opruge x od nerastegnuto stanja, ako položaj toga kraja opruge u nerastegnuto stanju odaberemo kao $x = 0$.

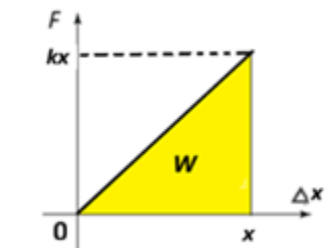
Kako interpretirati površinu trokuta ispod grafa u ovome slučaju? Ima li ona opet značenje rada?



Možemo zamisliti da ovu površinu razdvojimo na mnoštvo vrlo uskih pravokutnika (puno užih nego na slici) kod kojih bi sila bila približno stalna. Kako bismo protumačili značenje površine svakog vrlo uskog pravokutnika?

Površina svakoga od njih bila bi jednaka obavljenome radu pri vrlo malom produljenju opruge, kao u prethodnom slučaju.

Kad zbrojimo sve te vrlo male površine dobivamo da površinu trokuta ispod grafa možemo također protumačiti kao ukupni obavljeni rad pri rastezanju opruge. Kolika je ta površina, a time i obavljeni rad na opruzi? Odredite je u grupama.



Trokut na slici ima stranice $F_v = kx$ i x , pa je njegova površina, a time i obavljeni rad pri rastezanju opruge:

$$W = kx^2 / 2.$$

Kako matematički izraziti elastičnu energiju?

Kako je promjena elastične energije jednaka radu, a početna je elastična energija nerastegnute opruge bila jednaka nuli, dobivamo izraz za konačnu elastičnu energiju:

$$E_{ep} = kx^2 / 2.$$

O čemu govori ovaj izraz? Kada ga smijemo primijeniti?

Ovaj nam izraz govori o tome da je elastična energija opruge proporcionalna **kvadratu njenoga produljenja od nerastegnuto stanja**. Čvršće opruge (koje imaju veći k) imat će za isto produljenje

veću elastičnu energiju. Kako se radi o izrazu koji opisuje površinu trokuta, primjenjiv je samo za određivanje elastične energije pri rastezanju opruge od nerastegnutog položaja ($x = 0$ m).

Kako možemo odgovoriti na postavljena glavna pitanja sata o matematičkom opisu kinetičke i elastične energije? Usporedite dobivene izraze.

Dobili smo izraze koji matematički opisuju te energije: $E_k = mv^2/2$ i $E_{ep} = kx^2/2$.

Učenici uočavaju sličan matematički oblik izraza i kvadratnu ovisnost.

Odgovaraju li izrazi vašim pretpostavkama o ovisnosti energija o nekim veličinama?

Učenici analiziraju izraze i utvrđuju da kvalitativno odgovaraju pretpostavkama, ali da nisu pretpostavili kvadratnu ovisnost o brzini ili produljenju.

Što je bilo drugačije u određivanju rada kod ovih energija?

Učenici uočavaju da su rad kod djelovanja stalne sile na kolica mogli odrediti pomoću formule, ali su kod rada promjenljive sile to mogli jedino preko grafa.

Leibniz je još u 17. stoljeću uočio da je u sudarima ovješanih kuglica bio očuvan zbroj veličina mv^2 koji je kasnije (u 19. stoljeću) prozvan kinetičkom energijom uz dodavanje faktora $\frac{1}{2}$. No, u drugim se situacijama pokazalo da kinetička energija nije uvijek očuvana, ali se to moglo popraviti time što je uveden pojam „moguće kinetičke energije“ ili potencijalne energije. Npr. ako je loptica izgubila kinetičku energiju sabijajući oprugu, ta se energija mogla smatrati i dalje postojećom u obliku elastične potencijalne energije, koja bi se ponovno pretvarala u kinetičku, pri otpuštanju opruge. Tako je koncept potencijalne energije ušao u fiziku kako bi se proširilo očuvanje energije na više situacija.

Elastična energija je jedna vrsta potencijalne energije, koja će nam biti važna u mehanici.

Završni dio

Pomoću matematičkih opisa energija koje smo izveli, sada možemo zaključivati o tim energijama i radu kvalitativno i kvantitativno.

Konceptualna pitanja

1. Kad obavimo rad nad nekim tijelom, koja se promjena na njemu **mora** dogoditi?
 - A) Promjena energije tijela.
 - B) Promjena oblika tijela.
 - C) Promjena udaljenosti tijela od tla.
 - D) Promjena sastava tijela.
2. Ako oprugu A rastegnemo od nerastegnutog položaja za 2 cm, a oprugu B od nerastegnutog položaja za 6 cm, kako se odnose njihove konačne elastične energije? Opruge imaju jednake konstante elastičnosti.
 - A) Opruga A ima 3 puta **veću** energiju od opruge B.
 - B) Opruga A ima 3 puta **manju** energiju od opruge B.

- C) Opruga A ima 9 puta **veću** energiju od opruge B.
- D) Opruga A ima 9 puta **manju** energiju od opruge B.

Domaću zadaću učenici mogu riješiti u GeoGebri gdje mogu provjeriti svoje dijagrame:

<https://www.geogebra.org/m/qxr5ekyp>