

# Osnovni pojmovi

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF  
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 10. veljače 2015.)

# Pregled predavanja

Materijalna točka ili čestica tekućine

Brzina gibanja čestice tekućine

Masa čestice tekućine

Energija čestice tekućine

Termodinamika čestice tekućine

Procesi u neravnotežnom sustavu

# Materijalna točka ili čestica tekućine

U hidrodinamici (dinamici tekućina, fluida) se pojavljuju nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe (nelinearne PDJ) čija rješenja opisuju kako se **čestice tekućine** gibaju.

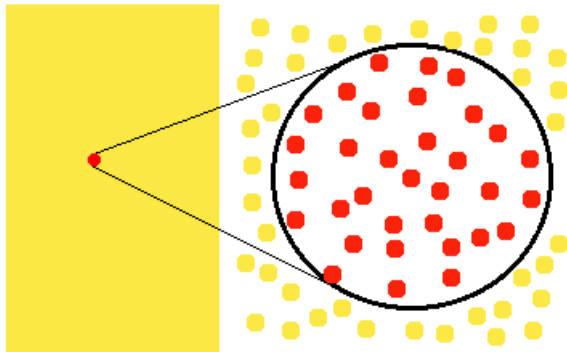
Matematički gledano **čestica tekućine** to je beskonačno mala točka, a sam fluid ili tekućina je **kontinuum** točaka. Između dviju različitih proizvoljno bliskih točaka postoji beskonačni broj drugih točaka.

Fizikalno, **čestice tekućine** su konačnih dimenzija.

## Čestica tekućine u hidrodinamici

- ▶ **nije** atom ili molekula od kojih se stvarno tekućina sastoji. (Brzina strujanja zraka nije brzina molekula od kojih se zrak sastoji).
- ▶ Čestica tekućine je, u hidrodinamičkom opisu, **mali termodinamički sustav**, konačnih dimenzija i u kojem se nalazi dovoljno velik (makroskopski) broj atoma ili molekula.
- ▶ Međusobno sudaranje atoma/molekula dovodi do uspostavljanja **lokalne termodinamičke ravnoteže**. Atomi/molekule nalaze se u stanju lokalne termodinamičke ravnoteže, iako tekućina kao cjelina **nije** u stanju termodinamičke ravnoteže.
- ▶ Hidrodinamika opisuje tekućinu kao skup malih termodinamičkih sustava u ravnotežnom stanju i koji su u međusobnom kontaktu te mogu razmjenjivati čestice, energiju, impuls...

# Materijalna točka ili čestica tekućine



Uvećana **materijalna točka** tekućine sastoji se od mnoštva atoma/molekula koji su u termodinamičkoj ravnoteži.

# Materijalna točka ili čestica tekućine

Koja je fizikalna dimenzija materijalne točke?

- ▶ Veličina mora osiguravati uspostavljanje termodinamičke ravnoteže. Termodinamička ravnoteža se uspostavlja međusobnim sudaranjem atoma/molekula.
- ▶ Veličina materijalne točke je veća od srednjeg slobodnog puta atoma/molekula,  $\ell$

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2} n \cdot \sigma}$$

gdje je  $n$  koncentracija atoma/molekula,

$$n = \frac{N}{V},$$

$N$  je broj atoma/molekula,  $V$  volumen, a  $\sigma$  je udarni presjek:

$$\sigma \approx \pi d^2,$$

$d$  je dijаметar atoma/molekula.

# Materijalna točka ili čestica tekućine

- ▶ Za plinove

$$n \sim 5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}, d \sim 10^{-19} \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \quad \ell \approx 10^{-7} \text{ m}$$

- ▶ Za plinove je srednji slobodni put,  $\ell$ , puno veći od prosječne udaljenosti između atoma/molekula

$$\text{prosječna udaljenost} \sim \frac{1}{n^{1/3}} \approx 2,7 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 10^{-2} \cdot \ell$$

- ▶ U tekućinama srednji slobodni put,  $\ell$ , i prosječna udaljenost među atomima/molekulama istog su reda veličine te su približno jednaki dimenzijama samih atoma/molekula.

# Brzina gibanja materijalne točke ili čestice tekućine

Za razliku od običnih termodinamičkih sustava, atomi/molekule u čestici tekućine imaju prosječnu brzinu različitu od nule.

- ▶ Brzinu čestice tekućine računamo kao **brzinu centra mase** svih atoma/molekula od kojih se čestica tekućine sastoji:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_i m_i}.$$

Sumacija ide preko svih atoma/molekula u čestici tekućine.  $\vec{r}$  je radijus vektor položaja čestice tekućine, koji identificiramo s položajem centra masa:

$$\vec{r} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}.$$

- ▶ Ako se tekućina sastoji od samo jedne vrste čestica, onda je brzina čestice tekućine ujedno i prosječna brzina atoma/molekula.



# Brzina gibanja materijalne točke ili čestice tekućine

- ▶ U pravilu, brzina čestice tekućine je puno manja od brzine gibanja samih atoma/molekula (cca. 500-1000 m/s). Izuzetak su slučajevi nadzvučnog gibanja tekućine.
- ▶ Ako su atomi/molekule u čestici u termodinamičkoj ravnoteži, onda su njihove brzine raspodjeljene oko brzine centra mase po Maxwelllovoj funkciji raspodjele.
- ▶ Brzine atoma/molekula jako variraju ne samo između različitih čestica tekućine, nego i u samoj čestici tekućine.
- ▶ Međutim, brzina centra mase čestice tekućine se **sporo** mijenja od jedne do druge točke u prostoru.

*Ako bi jedna čestica tekućine imala puno veću brzinu od susjednih, ona će tu brzinu brzo izgubiti kroz sudaranje atoma/molekula s atomima/molekulama susjednih čestica (proces viskoznosti).*

# Masa čestice tekućine

Matematički gledano čestice tekućine zamišljamo kao da su beskonačno male (iako one nisu), a sama tekućina se promatra kao jedan neprekidni medij tj. kontinuum točki.

U takvom opisu masa same čestice je beskonačno mala, jer je i sama čestica beskonačno mala.

Umjesto mase, koristimo se pojmom **gustoće mase**

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_i m_i}{V},$$

gdje se sumacija radi po česticama unutar volumena  $V$ , pri čemu je  $\vec{r}$  centar mase (ili težište).

# Energija čestice tekućine

Energija čestice tekućine se sastoji od zbroja

- ▶ kinetičke energije gibanja centra mase (kinetička energija)
- ▶ potencijalne energije centra mase (potencijalna energija)
- ▶ unutrašnje energije - energije gibanja i međudjelovanja atoma/molekula u čestici tekućine.

U matematičkom opisu kada se tekućina promatra kao kontinuum, a čestica tekućine je beskonačno mala, uvodi se pojam gustoće energije:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{E}{V} = \underbrace{\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}_{\text{kinetička}} + \underbrace{\rho g z}_{\text{gravitacijska pot.}} + \underbrace{\rho e}_{\text{unutrašnja}}$$

gdje je  $e$  unutrašnja energija po jedinici mase.

Kako se čestice gibaju, potencijalna energija može preći u kinetičku, i obrnuto, a kroz trenje (viskoznost) kinetička energija se može pretvoriti u unutrašnju.

# Termodinamika čestice tekućine

Budući da su čestice tekućine mali termodinamički sustavi, za svaki od njih postoje termodinamičke veličine i parametri koji ih definiraju.

Govorimo o

- ▶ gustoći unutrašnje energije

$$\rho(\vec{r}) \ e(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{U}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{U}{M} \frac{M}{V},$$

te gustoćama ostalih termodinamičkih potencijala,

- ▶ gustoći entropije

$$\rho(\vec{r}) \ s(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{S}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{S}{M} \frac{M}{V},$$

**Napomena:**  $e$  i  $s$  su redom unutrašnja energija i entropija po jedinici mase. Čestica tekućine koja ima jediničnu masu zauzima volumen:

$$v(\vec{r}) = \frac{1}{\rho(\vec{r})}.$$

# Termodinamika čestice tekućine

- ▶ gustoći broja čestica (koncentraciji)

$$n(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{N}{V}$$

- ▶ lokalnim vrijednostima tlaka,  $p(\vec{r})$  i temperature  $T(\vec{r})$

Kako su čestice tekućine u lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži, ove termodinamičke gustoće i termodinamički parametri su međusobno povezani uobičajenim termodinamičkim relacijama. Npr.

$$de = T ds - p dv = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Sve ove veličine ovisne su o prostornoj koordinati  $\vec{r}$ .

# Procesi u neravnotežnom sustavu

U sustavu koji globalno nije u termodinamičkoj ravnoteži doći će do procesa koji će nastojati uspostaviti globalnu ravnotežu.

To su situacije kada

- ▶ jedan dio sustava ima veću temperaturu od drugog,
- ▶ jedan dio sustava ima veći tlak od drugog,
- ▶ jedan dio sustava ima veću koncentraciju (nekih) čestica od drugog.
- ▶ postojanje kemijske reakcije koja mijenja koncentraciju nekih čestica
- ▶ vanjsko polje kojem je samo dio čestica izložen.

Procesi koji uspostavljaju termodinamičku ravnotežu mogu biti

- ▶ provođenje/vođenje ili **kondukcija** fizikalne veličine kroz tekućinu kada se sama tekućina ne pomiče ( $\vec{v}(\vec{r}) \equiv 0$ ). Proces prenosa se ostvaruje kroz međumolekularne (međuatomske) sudare (difuzno).
- ▶ **konvekcija** ili prenos fizikalne veličine putem gibanja (strujanja) tekućine s jednog mjesta na drugo ( $\vec{v}(\vec{r}) \neq 0$ ).

# Gustoća struje

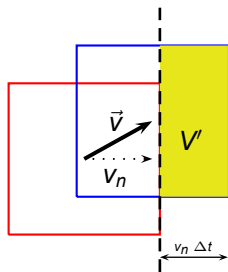
**Gustoća struje neke fizikalne veličine** može se definirati kao iznos promatrane fizikalne veličine koji je prenešen kroz jediničnu površinu u jedinici vremena. Fizikalna veličina može biti naboj, energija, broj čestica, impuls, entropija, ....

Gustoća struje u slučaju konvekcije (strujanja) je gustoća fizikalne veličine (npr.  $f = F/V$ ) pomnožena s komponentom prosječne brzine okomitom na površinu ( $v_n$ ):

$$j_F = (\vec{n} \cdot \vec{v}) f = v_n f.$$

Naime, po definiciji je

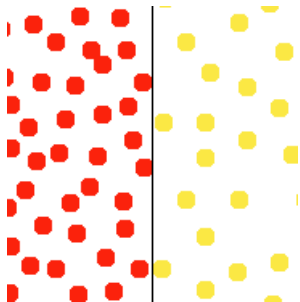
$$j_F = \frac{\Delta F}{S \cdot \Delta t}, \quad \text{pri čemu je}$$
$$\Delta F = \frac{F}{V} \cdot \underbrace{(S \cdot v_n \cdot \Delta t)}_{V'}.$$





# Gustoća struje

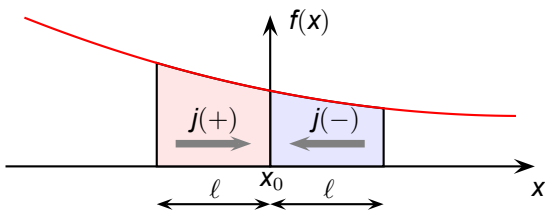
Provođenje fizikalne veličine u slučaju kondukcije se događa na mikroskopskom nivou kroz međumolekularne/međuatomske sudare.



Promatramo dva tanka sloja debljine srednjeg slobodnog puta  $\ell$  oko pregrade koja razdvaja dva područja u kojima je gustoća neke fizikalne veličine (npr. koncentracija čestica) različita. Radi jednostavnosti pretpostavljamo da je  $x$  pravac okomit na površinu. Otprilike  $1/6$  atoma/molekula s jedne strane

pregrade, unutar promatranog sloja, preći će na drugu stranu prepreke bez raspršenja gibajući se tipičnim prosječnim mikroskopskom brzinama, npr.  $v_{mik}$ .

# Gustoća struje



Gustoća struje je:

$$\begin{aligned}j_F &= j_F(+)-j_F(-)=\frac{f(x_0-\ell)}{6}v_{mik}-\frac{f(x_0+\ell)}{6}v_{mik} \\ &\approx -v_{mik}\cdot\frac{\ell}{3}\cdot\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x_0}=-D\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x_0}=-D(\vec{n}\cdot\vec{\nabla})f(\vec{r})|_{x_0},\end{aligned}$$

gdje su

$$\text{koeficijent difuzije} = D = \frac{1}{3} \ell \cdot v_{mik}$$

$$\text{gradijent} = \vec{\nabla}$$

$$\text{jedinični vektor okomit na površinu} = \vec{n}$$

# Gustoća struje

Promatrajući struju kroz različito orjentirane ravnine u danoj točki prostora, može se izdvojiti ona ravnina kroz koju je struja najveća po iznosu. Poopćena definicija struje je kao vektora (ili vektorskog polja) koje je po iznosu upravo jednako tom maksimalnom iznosu, a ima smjer normale na navedenu ravninu.

Gustoća struje je

- ▶ za slučaj konvekcije:

$$\vec{j}_F = \vec{v} \cdot f$$

- ▶ za slučaj kondukcije:

$$\vec{j}_F = -D \cdot \vec{\nabla} f$$

I pri tome treba voditi računa da prenosu neke fizikalne veličine kroz površinu doprinosi samo normalna komponenta struje kroz površinu. Prenesena količina  $F$  u jedinici vremena kroz površinu je:

$$\frac{dF}{dt} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j}_F, \quad d\vec{S} = dS \vec{n}$$

gdje je  $\vec{n}$  je vektor okomit na površinu u danoj točki prostora.

# Čemu je jedanaka konstanta difuzije ? (procjena)

$$D = \frac{1}{3} \ell \cdot v_{mik}$$

U slučaju plina, npr. He, već smo vidjeli da je:

$$\ell \sim 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Mikroskopsku brzinu možemo procijeniti iz Maxwelllove raspodjele:

$$v_{mik} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k_B T}{m}} \sim 1300 \text{ m/s}$$

Pa je:

$$D \sim 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{za plin He}$$

( $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  atoma/mol,  $V = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ ,  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ,  
 $T = 300 \text{ K}$ ,  $M_{He} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ,  $\sigma_{He} = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$ )

# Einsteinova relacija (veza difuzije i pokretnosti)

U sustavima u kojima postoji trenje zbog sudaranja na preprekama, čestica koja je izložena vanjskoj sili gibat će se brzinom proporcionaloj nametnutoj sili:

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{F}.$$

Faktor proporcionalnosti,  $\mu$ , naziva se tz. **pokretnost** ili **mobilnost**.

Primjeri takvog gibanja su elektroni u metalu/poluvodiču ili ion u otopini koji se gibaju pod utjecajem električnog polja (napona). Postoji veza između pokretnosti i provodnosti  $\sigma$  (odnosno specifičnog otpora tvari  $\rho$ ).

# Einsteinova relacija (veza difuzije i pokretnosti)

Pretpostavimo da čestice ne mogu izaći iz sustava, tako da se na jednom kraju nakupi veća koncentracija. U sustavu imamo dvije struje:

- ▶ struja konvekcije pod utjecajem vanjske sile:

$$j_v = v \cdot n = \mu \cdot n \cdot F = -\mu \cdot n \cdot \frac{\partial U}{\partial x}$$

$U$  je potencijalna energija polja koje stvara silu ( $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ ).

- ▶ struja kondukcije zbog različite koncentracije

$$j_d = -D \cdot \frac{\partial n}{\partial x}$$

U stanju ravnoteže te se dvije struje poništavaju, tako da je:

$$j_d + j_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{\mu}{D} \frac{\partial U}{\partial x}$$

# Einsteinova relacija (veza difuzije i pokretnosti)

Prema Boltzmannovoj funkciji raspodjele:

$$n(\vec{r}) \sim e^{-\frac{E_k + U(\vec{r})}{k_B T}},$$

pa je zato:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{1}{k_B T} \frac{\partial U}{\partial x}$$

Uspoređujući ova dva izraza nalazimo vezu između mobilnosti i konstante difuzije

$$D = \mu \cdot k_B T \quad \text{Einsteinova relacija (1905)}$$

# Einsteinova relacija (veza difuzije i pokretnosti)

Tu je relaciju Einstein dobio u radu o Brownovom gibanju.

**Brownovo gibanje** je gibanje čestice pod utjecajem nasumične sile i sile trenja. I nasumična sila i sila trenja postoje zbog sudaranja s atomima/molekulama medija u kojem se promatrana čestica nalazi.

Dakle radi se o čestici koja u sudarima stalno mijenja smjer gibanja. Srednja vrijednost kvadrata pređenog puta Brownove čestice u vremenu  $t$  je:

$$\overline{R^2} = D \cdot t$$

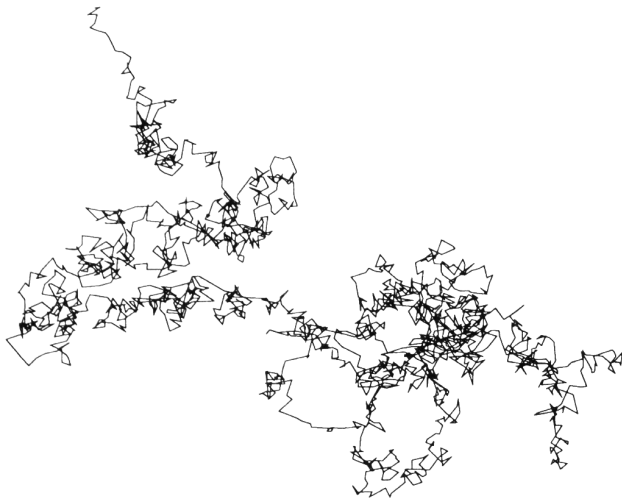
$D$  je konstanta difuzije. Također se može pokazati da je:

$$D = \frac{\ell^2}{\tau} = \ell \cdot \bar{v}.$$

gdje je  $\ell$  srednji slobodni put čestice,  $\tau$  prosječno vrijeme između dva sudara i  $\bar{v}$  prosječna brzina čestice između dva sudara.



# Brownovo gibanje



Prikaz nasumičnog gibanje čestice (Brownovo gibanje).