Gibanje tekućine

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 10. veljače 2015.)

Pregled predavanja

Različiti načini opisa gibanja

Ubrzanje čestica tekućine

Vremenska promjene u čestici tekućine

Strujnice i trajektorije

Deformacija tekućine

Potencijalno strujanje

Eulerov opis

Gibanje čestice tekućine se može promatrati na dva načina.

Eulerov način: promatrač se nalazi u mirujućem sustavu i promatra gibanje tekućine u nekoj točki prostora i nekom trenutku vremena. Gibanje tekućine opisano je vektorskim poljem brzine:

$$\vec{v}(\vec{r}, t).$$

$\vec{v}$ **nije** brzina jedne određene čestice tekućine, nego one čestice koja se u datom momentu vremena t našla u prostornoj točki $\vec{r}$.

To je način na koji ribič koji peca ribu na obali rijeke vidi gibanje rijeke oko niti udice.

Lagrangeov način

Lagrangeov način: Promatrač prati gibanje jedne određene čestice tekućine. Čestica se može specificirati pomoću položaja čestice $\vec{r}$ koji ona ima u vremenskom trenutku t. Položaj čestice $\vec{r}$ je ovisan o vremenu. Brzina čestice u Lagrangeovom opisu označavat će se velikim slovom:

$$\vec{V}(\vec{r}(\vec{r}_0, t), t) = \vec{V}(\vec{r}_0, t)$$

Položaj čestice u nekom proizvoljnom trenutku vremena određen je njenim početnim položajem i vremenom t:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\vec{r}_0, t),$$

To je način na koji ribič na obali vidi gibanje čamca kojeg rijeka nosi.

Ubrzanje čestica tekućine

Čestica koja je u trenutku t bila u točki $\vec{r}$ i imala brzinu $\vec{v}(\vec{r},t)$, u trenutku $t+\Delta t$ nalazit će se u točki:

$$\vec{r}_1 \approx \vec{r} + \vec{v}(\vec{r},t)\cdot\Delta t$$

te imati brzinu:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(\vec{r}_1, t+\Delta t) \approx \vec{v}(\vec{r} + \vec{v}(\vec{r},t)\cdot\Delta t, t+\Delta t)$$

Ukupna promjene brzine unutar malog vremenskog intervala Δt je:

$$\frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t} \approx (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Dakle promjena brzine ima dva doprinosa:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r},t)$$

Ubrzanje čestica tekućine

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r}, t)$$

- Prvi član sadrži eksplicitnu vremensku derivaciju i različit je od nule samo u nestacionatnim situacijama.
- Drugi je član različit od nule samo ako se tekućina neuniformno giba (prostorno ovisna brzina).

  Npr. ako tekućina struji kroz cijev različitog uzdužnog presjeka. Čestica će se ubrzavati u užem dijelu i usporavati u širem, iako je brzina u svakoj pojedinoj točki prostora vremenski konstantna.

Vremenska promjene u čestici tekućine

Ono što vrijedi za brzinu čestice tekućine vrijedi i za svaku drugu fizikalnu veličinu.

Promatra li se neka (skalarna) veličina $f(\vec{r}, t)$ koja karakterizira samu česticu tekućine, tada je ukupna vremenska promjena te veličine u čestici:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f$$

Često se ukupna vremenska derivacija

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

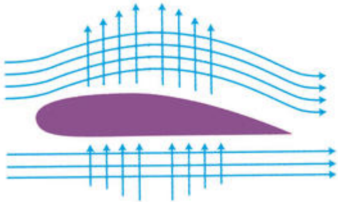
naziva **konvektivna** derivacija ili **materijalna** derivacija.
Za nju se koristi i posebna oznaka:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

Strujnica

Strujnica je prostorna krivulja (linija) koja je u točkama prostora kroz koje prolazi **kolinearna** s brzinom tekućine.

Ako je riječ o nestacionarnom gibanju, strujnice se vremenski mijenjaju kako se brzina tekućine mijenja.



Strujnice oko krila.

Strujnica

Iz defincije izlazi skup diferencijalnih jednadžbi koji određuju strujnicu. Označi li se s $\vec{dl}$ tangenta strujnice,

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} \; + \; dy\,\vec{j} \; + \; dz\,\vec{k},$$

tada je vektor $\vec{dl}$ paralelan (kolinearan) s vektorom brzine tekućine:

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t)}$$

Ova se jednadžba može i ovako zapisati:

$$\vec{dl} \times \vec{v} = 0.$$

Trajektorija (putanja)

Trajektorija ili putanja je skup svih točaka koju u vremenu prolazi jedna čestica tekućine.

U Langrangeovom opisu brzina čestice je:

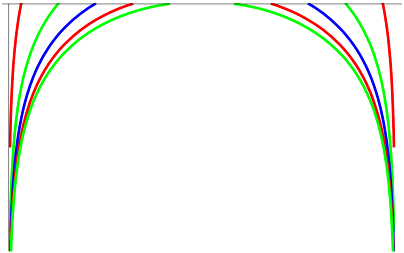
$$\vec{V}(\vec{r}_0, t),$$

te se položaj čestice dobiva integriranjem te brzine po vremenu:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} dt\, \vec{V}(\vec{r}_0, t).$$

U slučaju stacionarnog gibanja (vremenski neovisnog) i trajektorija i strujnica su iste krivulje.

Strujnice i trajektorije - primjeri



Strujnice kod valova na vodi.

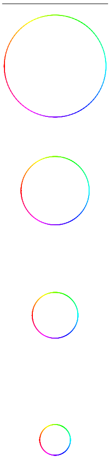
Za valove na vodi brzine čestica tekućine su približno $(y < 0)$:

$$
\begin{aligned}
v_x &= A\, e^{ky}\, \sin(kx - \omega t) \\
v_y &= A\, e^{ky}\, \cos(kx - \omega t)
\end{aligned}
$$

Integrirajući jednadžbu za strujnice dobiva se:

$$
y = y_0 + B\, \log\left[\frac{\sin(x)}{\sin(x_0)}\right]
$$

Strujnice i trajektorije - primjeri



Na slici lijevo trajektorije čestica kod valova na vodi.

Integrirajući približno jednadžbu za trajektorije izlazi da je:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx x_0 - \frac{A}{\omega}\, e^{ky_0} \cos(kx - \omega t) \\ y(t) &\approx y_0 - \frac{A}{\omega}\, e^{ky_0} \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Trajektorije su kružnice:

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = \left(\frac{A}{\omega}\right)^2 \, e^{2ky_0}$$

čiji je radijus to manji što je dubina veća.

Deformacija tekućine

Ako se na početku (t=0) izaberu četiri (ili 8) čestice tekućine koje čine pravilni kvadrat (ili kocku), gibanje tekućine će dovesti do deformiranja oblika kvadrata (kocke). Ta deformacija će se s vremenom stalno povećavati.

Veličina koja opisuje deformiranje je **prostorna ovisnost brzine**, koju se može zapisati kao jedna matrica ili tenzor:

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{gdje su } v_i = v_x, v_y, v_z, \qquad x_j = x, y, z.$$

Veličinu G_{ij} zove se **tenzor brzine deformacije**. Tenzor G_{ij} je 3×3 matrica zadana s 9 brojeva. Međutim, tih 9 brojeva tenzora nisu **jedna fizikalna cjelina**.

Dekompozicija matrice/tenzora u ireducibilne dijelove

- Mnoge fizikalne veličine opisane su vektorima, a oni se obično prikazuju kao skup od 3 broja koja predstavljaju projekcije vektora na koordinatne osi:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

gdje su koordinate:

$$x = \vec{r}\cdot\vec{i}, \qquad y = \vec{r}\cdot\vec{j}, \qquad z = \vec{r}\cdot\vec{k}.$$

- Koordinate ovise o izboru koordinatnog sustava. Izborom drugog koordinatnog sustava zarotiranog u odnosu na prvi, vektor će imati drugi skup koordinata koje ga predstavljaju. Nove koordinate obično su dane kao linearna kombinacija starih:

$$\begin{aligned} x' &= R_{11}\,x + R_{12}\,y + R_{13}\,z \\ y' &= R_{21}\,x + R_{22}\,y + R_{23}\,z \\ z' &= R_{31}\,x + R_{32}\,y + R_{33}\,z \end{aligned}$$

Dekompozicija matrice/tenzora u ireducibilne dijelove

- Tako i matrica/tenzor mijenja svoje komponente u novom zarotiranom koordinatnom sustavu. Pri tome su nove komponente matrice, njih 9, dane kao linearna kombinacija starih 9 komponenata. Dakle matrica transformacije je 9×9.

- Transformacija matrice se može značajno pojednostaviti uočavanjem neke pravilnosti:
  - dijagonalna matrica je u svakom koordinatnom sustavu ista. (trag matrice - jedan nezavisni broj)
  - simetrična matrica čiji trag je jednak nuli, pri transfomaciji ponovo ostaje simetrična s tragom jednakim nuli. (5 nezavisnih brojeva)
  - antisimetrična matrica pri transfomaciji ponovo ostaje antisimetrična. (3 nezavisnih brojeva)

- Pojedini dijelovi tenzora se transformiraju nezavisno jedni od drugih. Svaki 3×3 tenzor može se rastaviti u dijelove koji se transformiraju međusobno nezavisno ($9 = 1 + 3 + 5$: trag, antisimetrična matrica, simetrična matrica s tragom nula).

Deformacija tekućine - nastavak

Matrica G_{ij} se može razložiti u tri dijela koja fizikalno opisuju različite vrste deformiranja tekućine:

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad = \quad \overbrace{\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right]}^{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})} \cdot \frac{\delta_{ij}}{3} \qquad \text{trag matrice}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] \qquad \text{antisimetrični dio}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right] - \frac{\delta_{ij}}{3}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) \qquad \text{simetrični bez traga}$$

Deformacija tekućine

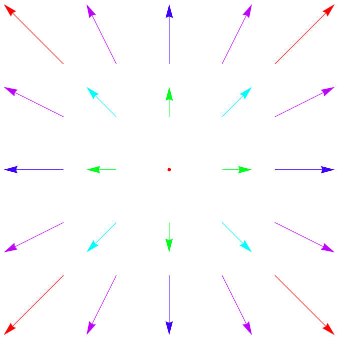
1. dio G_{ij} je dan s tragom matrice ($\sim \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$) odgovara zgušnjavanju (ili razrijeđivanju) tekućine. Poznat je i kao **volumna dilatacija** (kompresija, ekspanzija).

Npr. ako se tekućina giba od centra:

$$\vec{v}(\vec{r}) = c\,\vec{r}.$$

Tenzor brzine deformacije je:

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$



Primjer: ekspanzija svemira!

Deformacija tekućine

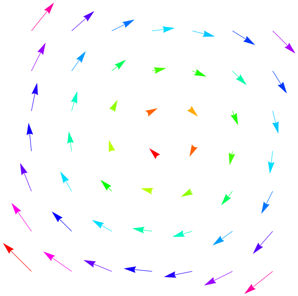
2. dio G_{ij} (antisimetrični) različit je od nule kada se tekućina rotira.

Npr. za **krutu rotaciju** tekućine polje brzina je:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r},$$

gdje je $\vec{\Omega}$ vektor oko kojeg tekućina rotira. Dobiva se:

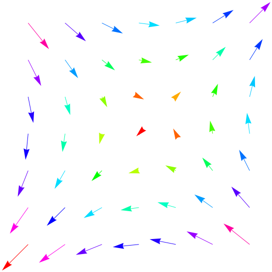
$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

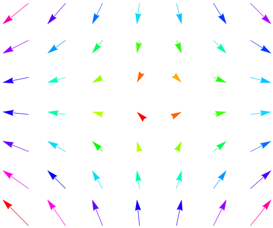


Deformacija tekućine

3.dio G_{ij} (simetrični) predstavlja gibanje tekućine u kojem se ona u jednom smjeru **skuplja** a u drugom (okomitom) **rasteže**.
Primjeri:

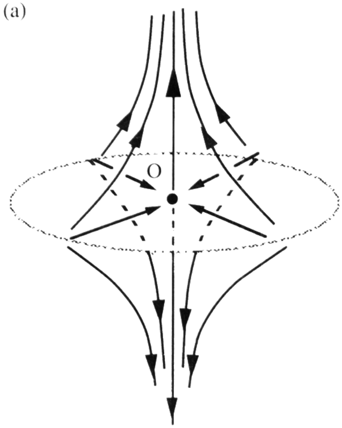
$$\begin{aligned} v_x &= c\,y \\ v_y &= c\,x \\ v_z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_x &= +c\,x \\ v_y &= -c\,y \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

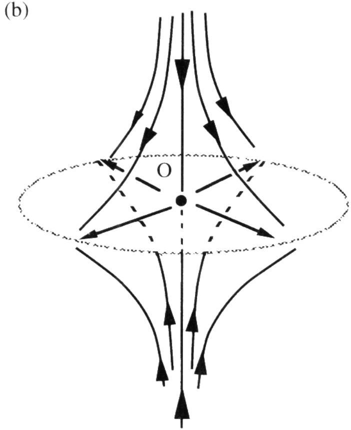




Pogodnom rotacijom takva matrica se može dovesti u dijagonalni oblik.

Deformacija tekućine





Prikaz gibanje tekućine u 3D koje se sastoji od skupljanja i rastezanja.

Deformacija tekućine

Brzina se tekućine uvijek može razložiti u 3 člana:

$$\vec{v} = \vec{v}^{(d)} + \vec{v}^{(a)} + \vec{v}^{(s)}.$$

- Prvi član opisuje promjene gustoće tekućine (odnosno volumena čestice tekućine konstantne mase) te vrijedi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(d)} \sim \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \neq 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v}^{(d)} = 0.$$

- Drugi član opisuje rotacijsko gibanje, te vrijedi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(a)} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v}^{(a)} \neq 0.$$

- Za treći član vrijedi:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(s)} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v}^{(s)} = 0.$$

Potencijalno strujanje

Gibanje tekućine koje zadovoljava svojstvo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0.$$

poznato je kao **potencijalno strujanje**, i vrlo je nalik problemu stacionarnog električnog polja u vakuumu.

Polje brzina moguće je tada prikazati kao gradijent potencijala:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi.$$

A sam potencijal zadovoljava Laplaceovu jednadžbu:

$$\Delta\Phi = 0.$$