Zakoni sačuvanja

« Hidrodinamika »

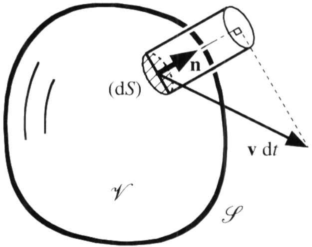
Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 5. ožujka 2015.)

Pregled predavanja

Jednadžba balansa



Iz volumena $\mathcal{V}$ zatvorenog površinom $\mathcal{S}$ izlazi struja čestica tekućine odnoseći određenu količinu veličine F. To može biti naboj, masa, količina momenta (impuls), energija, ...

Ukupna količina fizikalne veličine F unutar volumena **umanjena** je za iznesenu količinu putem struje. Struja može biti konduktivna (difuzija) i/ili konvektivna (gibanje tekućine).

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\int d\vec{S} \cdot \vec{j}_F.$$

Jednadžba balansa

I prvi i drugi član jednadžbe može se prevesti u volumni integral.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int dV\, f = \int dV\, \frac{\partial f}{\partial t},$$

gdje je f gustoća promatrane fizikalne veličine F.

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{j_F} = \int dV\, (\vec{\nabla} \cdot \vec{j_F}) \qquad \text{(Gaussov teorem)}$$

Kombinirajući ove izraze:

$$\int dV \underbrace{\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{j_F}) \right\}}_{\equiv 0 \text{ za proizvoljnu } s} = 0$$

Izlazi diferencijalni oblik zakona sačuvanja veličine F:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{j_F}) = 0 \qquad (\textbf{jednadžba balansa}).$$

Jednadžba balansa

U sustavu mogu postojati izvori ili ponori fizikalne veličine. Npr.

- razne kemijske reakcije mogu mijenjati sastav tekućine (mjenjanje koncentracije pojedinih komponenata sastava).
- Trenje generira toplinu koja mijenja unutrašnju energiju i temperaturu tekućine.
- …

Neka $\sigma[F]$ označava gustoću izvora fizikalne veličine F. Količina fizikalne veličine koja se promijeni u volumenu $\mathcal{V}$ zbog postojanja izvora je:

$$\frac{dF^{(\sigma)}}{dt} = \int dV\, \sigma[F].$$

Ako je $\sigma[F]$ pozitivno onda se radi o izvorima (porast), a ako je negativno onda su to ponori jer se količina fizikalne veličine F umanjuje.

Jednadžba balansa

Jednadžbu balansa mora se modificirati uzimajući u obzir gustoću izvora:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{j_F}) = \sigma[F]$$

- U slučaju prenosa mase, $\sigma[M] \equiv 0$. Nema izvora ili ponora za masu (osim radioaktivnih procesa koje ovdje ne uzimamo u obzir).
- Ukupna je energija sustava sačuvana, pa je $\sigma[U] \equiv 0$.
- Ukupni impuls sustava također je sačuvan, $\sigma[\vec{P}] \equiv 0$.
- Ne postoji sačuvavanje entropije. U sustavu postoje procesi koji mogu povećavati entropiju, $\sigma[S] \geq 0$.

Sačuvanje mase tekućine

Gustoća mase tekućine može biti veća ili manja u pojedinim dijelovima promatranog sustava, ali se ona **ne može** mijenjati bez stvarnog premještanja tekućine s jednog mijesta na drugo. Druge fizikalne veličine mogu se prenositi i procesom kondukcije.

Tekućina se može prenositi samo putem gibanja.

Ukupna struja za prijenos mase je:

$$\vec{j}_M = \rho\, \vec{v}.$$

Diferencijalni oblik **zakona sačuvanja mase** je:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\, \vec{v}) = 0. \qquad (\textbf{jednadžba kontinuiteta}).$$

Sačuvanje mase tekućine

Jednadžba kontinuiteta se može preurediti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \, \vec{v}) &= \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\
&= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.
\end{aligned}$$

Sačuvanje mase tekućine

Promatra se česticu tekućine jedinične mase (istog broja molekula). Pri gibanju čestica mijenja svoj volumen koji je jednak inverznoj gustoći:

$$V = \frac{1}{\rho}.$$

Relativna promjena volumena je:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}.$$

Ako je tekućina nestlačiva njena se gustoća pri gibanju ne mijenja, pa je

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$$

Sačuvanje mase tekućine

I plinovi se mogu tretirati kao nestlačiva tekućina ako je brzina strujanja puno manja od brzine zvuka:

$$|\vec{v}| \ll c.$$

Kasnije će se vidjeti da je promjena tlaka u tekućini reda veličine:

$$\delta p \sim \rho\, v^2$$

pa je relativna promjena gustoće zbog promjene tlaka:

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim \chi\, \delta p \sim \chi\, \rho\, v^2,$$

gdje je χ kompresibilnost tekućine. Tekućina se može tretirati kao nestlačiva ako je:

$$\frac{\delta \rho}{\rho} \ll 1 \qquad \Rightarrow \qquad \chi\, \rho\, v^2 \ll 1, \qquad \Rightarrow$$

$$v \ll \frac{1}{\sqrt{\chi\, \rho}} \simeq c \qquad \text{(brzina zvuka)}.$$

Zakon sačuvanje mase u sustavu s više komponenata

Neka se tekućina sastoji od nekoliko vrsta čestica koje su u kemijskoj ravnoteži. Neka je γ indeks za komponentu tekućine.

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma &= \text{gustoća jedne od komponenti} = n_\gamma\, M_\gamma \\
n_\gamma &= \text{koncentracija komponente (broj čestica u jed. volumenu)} \\
M_\gamma &= \text{molekularna masa}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ukupna gustoća} &= \rho = \sum_\gamma \rho_\gamma \\
\text{Brzina} &= \vec{v} = \frac{\sum_\gamma \rho_\gamma \vec{v}_\gamma}{\sum_\gamma \rho_\gamma}
\end{aligned}$$

Brzina difuzije pojedine komponente je relativna brzina komponente u odnosu na **srednju** brzinu tekućine:

$$\vec{V}_\gamma = \vec{v}_\gamma - \vec{v},$$

te vrijedi:

$$\sum_\gamma \rho_\gamma \vec{V}_\gamma = 0.$$

Zakon sačuvanje mase u sustavu s više komponenata

Između komponenti može postojati kemijska reakcija, koja se može zapisati kao:

$$\sum_{\gamma} \nu_\gamma A_\gamma,$$

gdje je A_γ oznaka kemijskog simbola, a ν_γ je udio komponente u reakciji. Npr. za reakciju između vodika, kisika i vode:

$$2\mathrm{H}_2 + \mathrm{O}_2 - 2\mathrm{H}_2\mathrm{O} = 0.$$

udjeli komponenti su:

$$\nu_{\mathrm{H}_2} = 2 \qquad \nu_{\mathrm{O}_2} = 1 \qquad \nu_{\mathrm{H}_2\mathrm{O}} = -2.$$

Vrijedi **zakon začuvanja mase u kemijskoj reakciji**:

$$\sum_{\gamma} \nu_\gamma M_\gamma = 0.$$

Zakon sačuvanje mase u sustavu s više komponenata

Može se uvesti pojam **brzine kemijske reakcije**:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\nu_\gamma} \cdot \left[\begin{array}{l} \text{broj molekula koji u jediničnom volumenu} \\ \text{i u jediničnom vremenu uđu u reakciju.} \end{array} \right] \\ &= \text{ne ovisi o vrsti molekule u reakciji !} \end{aligned}$$

Tada:

$$\sigma[M_\gamma] = \nu_\gamma M_\gamma \cdot w$$

opisuje brzinu stvaranja molekule tipa γ u reakciji.

Međutim ukupna je masa sačuvana:

$$\sigma[M] = \sum_\gamma \sigma[M_\gamma] = w \cdot \sum_\gamma \nu_\gamma M_\gamma \equiv 0.$$

Zakon sačuvanje mase u sustavu s više komponenenata

Jednadžba balansa mase pojedinih komponenti je:

$$\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{M_\gamma} = \nu_\gamma M_\gamma \cdot w = \sigma[M_\gamma].$$

Pri tome struja može biti konvektivna zbog gibanja tekućine kao cjeline, ili difuzna (konduktivna) zbog prostorne preraspodjele pojedinih komponenti tekućine:

$$\vec{j}_{M_\gamma} = \rho_\gamma \vec{v}_\gamma = \underbrace{\rho_\gamma(\vec{v}_\gamma - \vec{v})}_{\text{difuzija}} + \underbrace{\rho_\gamma \vec{v}}_{\text{konvekcija}} .$$

Pri tome vrijedi:

$$\vec{j}_M = \rho\, \vec{v} = \sum_\gamma \rho_\gamma \vec{v}_\gamma . = \sum_\gamma \vec{j}_{M_\gamma}$$

Sila po jedinici površine

Sila djelovanja (mirujuće) tekućine ili plina na neku površinu prikazuje se pomoću tlaka. Smjer djelovanja sile tlaka uvijek je okomito na površinu bez obzira na orjentaciju same površine.

Diferencijalni element površine prikazuje se s vektorom normalnim na površinu pomnoženim s iznosom samog elementa:

$$d\vec{S} = \vec{n}\, dS.$$

Sila djelovanja na diferencijalni element je:

$$d\vec{F} = -p\, d\vec{S}.$$

Smjer djelovanja sile je suprotan od smjera normale. Ukupna sila tlaka na volumen $\mathcal{V}$ zatvoren površinom $\mathcal{S}$ je:

$$\vec{F} = -\int_{\mathcal{S}} p\, d\vec{S} = -\int_{\mathcal{V}} dV\, (\vec{\nabla} p)$$

Sila po jedinici površine

Kada se tekućina giba, osim normalne postoji i tangencijalna komponenta sile. Tangecijalna komponenta **ovisi o orjentaciji površine**.

Općenito, sila tlaka i tangencijalna sila se prikazuju pomoću **tenzora naprezanja** σ_{ij}. Sila po jedinici površine jednaka je:

$$dF_i = \sum_j \sigma_{ij} dS_j,$$

gdje su

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= (dF_x, dF_y, dF_z) \\ d\vec{S} &= (dS_x, dS_y, dS_z) = \vec{n}\, dS. \end{aligned}$$

Tenzor naprezanja ima dva doprinosa, dijagonalni koji dolazi od tlaka, te ostatak, ovisan o brzini tekućine i povezan s viskoznošću:

$$\sigma_{ij} = -p\, \delta_{ij} + \sigma'_{ij}.$$

Eulerova jednadžba

Zanemari li se djelovanje viskoznosti, sila koja djeluje na neku česticu tekućine je tlak, točnije razlika tlaka (ili gradijent).

$$\vec{F}_p = -\int_{\mathcal{V}} dV\, \vec{\nabla} p(\vec{r}, t).$$

Ta će sila ubrzavati česticu tako da je ukupna (materijalna) promjena brzine:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{f}_p}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p(\vec{r}, t)$$

pri čemu je ρ masa jediničnog volumena (čestice).

Eulerova jednadžba

Jednadžba koja opisuje gibanje čestice tekućine je:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p(\vec{r}, t).$$

Ovu je jednadžbu izveo L.Euler 1755. god., pa se naziva **Eulerova** jednadžba.

Ukoliko na tekućinu djeluje i sila gravitacije, dodatna sila po jedinici volumena je:

$$\vec{f}_G = \rho\vec{g}, \qquad\qquad (\vec{g} \text{ je gravitacijsko ubrzanje}).$$

Obično se pretpostavlja da gravitacijsko ubrzanje $\vec{g}$ ima smjer prema negativnoj strani z osi.

Poopćena Eulerova jednadžba glasi:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p(\vec{r}, t) + \vec{g}.$$

Eulerova jednadžba

U Eulerovoj jednadžbi je zanemareno trenje (tj. viskoznost). Ona vrijedi za tz. **idealnu tekućinu**.

U realnim tj. **viskoznim tekućinama** postoji trenje.

Primjer idealne tekućine je tekući helij, He^4, na temperaturama ispod 2,172 K.

U nekim situacijama i realna se tekućina s viskoznošću može tretirati kao idealna. Npr. laminarno strujanje za velike Reynoldsove brojeve (Re) u području prostora udaljenom od rubova i izvan traga.

Rubni uvjeti

Eulerovu jednadžbu treba nadopuniti s rubnim uvjetima.

Uvjet je da tekućina ne može prodirati u unutrašnjost zidova koji je okružuju, tj. da je normalna komponenta struje na zidove jednaka nuli:

$$\vec{n} \cdot \vec{j}_M|_{\vec{r}(\text{zid})} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{n} \cdot \vec{v}|_{\vec{r}(\text{zid})} = v_n \equiv 0.$$

Ukoliko se zidovi pomiču (npr. kugla koja se giba u tekućini) tada normalna komponenta struje treba odgovarati normalnoj komponenti brzine gibanja zida:

$$\vec{n} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_{\text{zid}})|_{\vec{r}(\text{zid})} = 0.$$

U idealnoj tekućini tangencijalna komponenta brzine na površini zida **ne mora biti nula.**

Sačuvanje količine gibanja

Eulerova jednadžba se može prevesti u jednadžbu koja ima oblik jednadžbe balansa za količinu gibanja. Količina gibanja jedne čestice tekućine je:

$$\vec{p} = \rho\,\vec{v}.$$

Promjena količine gibanja je:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} &= \vec{v}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \\
&= \vec{v}\,[-\vec{\nabla}(\rho\vec{v})] + \rho\,[-(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \frac{\vec{f}}{\rho}] \\
&= -[\vec{v}\,\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) + (\rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}] - \vec{\nabla}p + \vec{f} \\
&= -\left[\sum_{ij}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\, v_j v_i)\right] - \left[\sum_{ij}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\,(\delta_{ij}\,p)\right] + \vec{f}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

Sačuvanje količine gibanja

Prikazano preko pojedinih komponenti impulsa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i) = -\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij} + f_i,$$

gdje je

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij}\, p + \rho\, v_i\, v_j.$$

tenzor toka impulsa ili količine gibanja.

i-ti red u matrici Π_{ij} predstavlja komponente vektora struje koji prenosi i-tu komponentu impulsa. j je indeks vektora struje.

Impuls nije sačuvan ako je tekućina izložena vanjskoj sili, npr. gravitacijskoj, što je opisano s izvorom f_i u jednadžbi balansa.

Viskoznost

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i) = -\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij}\, p + \rho\, v_i\, v_j) + f_i$$

Ova jednadžba vrijedi samo za idealnu tekućinu jer trenje (viskoznost) nije uzeto u obzir.

Viskoznost se neće pojavljivati u jednadžbi kao vanjska sila koja mijenja ukupni impuls. Naime, viskoznost će usporavati slojeve vode koji brzo gibaju, ali ubrzavati one sporije slojeve vode. Viskoznost je jedan dodatni mehanizam prijenosa impulsa s jednog mjesta na drugo, dakle jedan dodatni član u tenzoru struje impulsa.

Mikroskopski, viskoznost je vrsta difuzije molekula velike brzine iz jednog sloja tekućine u drugi sporiji sloj. Pri tome se prosječna brzina sporijeg sloja povećava, a onog bržeg sloja smanjuje.

Viskoznost

Viskoznost se pojavljuje kao dodatna (tangencijalna) komponenta sile po jedinici površine, u smjeru gibanja tekućine koja je proporcionalna gradijentu brzine okomitom na površinu.

$$\frac{dF_i}{dS} \sim \sum_j \eta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j,$$

gdje su n_j komponente normalnog vektora na jedinicu površine dS. (Radi se o površini koja obuhvaća česticu tekućine.)

Koeficijenti proporcionalnosti η_{ij} nisu međusobno nezavisni, jer se gornji izraz mora transformirati kao vektor prilikom rotacije koordinatnog sustava. U stvari postoje samo dva međusobno nezavisna koeficijenta.

Zapisana preko tenzora naprezanja gornja jednadžba glasi:

$$F_i = \int_{\mathcal{S}} \sum_j \sigma'_{ij}\, n_j\, dS = \int_{\mathcal{V}} dV \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma'_{ij}$$

Viskoznost

pa je jednadžba gibanja za česticu viskozne tekućine:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\nabla_i p + f_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma'_{ij}.$$

Jednadžba se može preurediti u formu jednadžbe kontinuiteta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i) = -\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\delta_{ij}\, p + \rho\, v_i\, v_j - \sigma'_{ij}) + f_i$$

Slijedi da tenzor toka impulsa ima jedan dodatni član:

$$\Pi_{ij} = \delta_{ij}\, p + \rho\, v_i\, v_j - \sigma'_{ij} = \Pi^{(0)}_{ij} + \Pi'_{ij}.$$

koji dolazi od viskoznosti.

Viskoznost

Pri tome je Π'_{ij} proporcionalno derivacijama brzine.

To nije sasvim točno. Postoje tekućine gdje je ta ovisnost puno složenija: suspenzije, emulzije, otopine polimera, boje, gline, mulj, ledenjaci .... To su tz. ne-Newtonove tekućine.

Newtonove tekućine su one gdje je Π'_{ij} proporcionalno derivacijama brzine.

Viskoznost

Ovdje se razmatraju samo tekućine Newtonovog tipa gdje je:

$$\Pi'_{ij} \sim \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Dakle, pretpostavlja se da je Π'_{ij} proporcionalno tenzoru brzine deformacije G_{ij}. Sam tenzor G_{ij} se može razložiti u tri nezavisna dijela:

- skalarni dio ($\sim \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$),
- rotacijski antisimetrični dio,
- i simetrični dio.

Treba uočiti da antisimetrični dio G_{ij} predstavlja krutu rotaciju tekućine (kao što se rotira kruto tijelo) te on **ne doprinosi** viskoznosti. Ostala dva dijela učestvuju u pojavi viskoznosti.

Viskoznost

Budući da su ta dva dijela fizikalno različita, svaki od njih daje doprinos viskoznosti na poseban način, koji je opisan s posebnim koeficijentom viskoznosti:

$$\Pi'_{ij} = -\eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] - \zeta \, \delta_{ij} \, (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}).$$

(ovdje je *pogođen* pravi izraz za viskoznost vodeći računa o načinu na koji se tenzor transformira iz jednog koordinatog sustava u drugi.)

Nepoznati koeficijenti, η i ζ su koeficijenti viskoznosti koji su općenito funkcije temperature i tlaka.

- η je **dinamička viskoznost**
- ζ je tz. **druga viskoznost**.

Viskoznost

Druga viskoznost igra ulogu kod stlačivog gibanja, npr. propagacije zvuka. Ona dovodi do gušenja zvučnih valova.

Često se umjesto dinamičke viskoznosti koristi tz. **kinematička** viskoznost definirana kao:

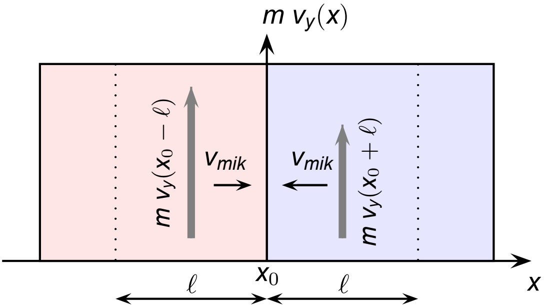
$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Tipične vrijednosti

	η (kg/m s)	ν (m^2/s)
Voda	1,0 10^{-3}	1,0 10^{-6}
Zrak	1,8 10^{-5}	1,4 10^{-5}
Alkohol	1,8 10^{-3}	2,2 10^{-6}
Glicerin	0,85	6,8 10^{-4}
Živa	1,56 10^{-3}	1,2 10^{-7}

Uvijek je: $\eta,\ \zeta > 0$.
Viskoznost dovodi do gubljenja kinetičke energije koja se transformira u unutrašnju. Obrnuti proces nije moguć.

Mikroskopski model viskoznosti



Neka je x_0 vrijednost x-a koja razdvaja dva sloja vode koji se gibaju paralelno u y smjeru različitim brzinama, $v_y(x_0-\ell)$ i $v_y(x_0+\ell)$. Otprilike 1/6 atoma/molekula iz sloja debljine srednjeg slobodnog puta, ℓ, preći će u susjedni sloj prenoseći prosječnu vrijednost y-komponente impulsa. Neto preneseni impuls u jedinici vremena kroz jediničnu površinu je:

$$j_P = \frac{n\,m\,v_{mik}}{6}\left[v_y(x_0-\ell) - v_y(x_0+\ell)\right] \approx \frac{n\,m\,v_{mik}\,\ell}{3}\,\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Mikroskopski model viskoznosti

Promjenjeni impuls u jedinici vremena odgovara točno tangencijalnoj sili viskoznosti:

$$j_P = \frac{F_y}{S} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Koeficijent dinamičke viskoznosti je:

$$\eta = \frac{n\, m\, v_{mik}\, \ell}{3} = \rho\, \frac{v_{mik}\, \ell}{3}$$

gdje je n koncentracija molekula, m masa molekula, ρ gustoća, ℓ srednji slobodni put, te v_{mik} prosječna brzina gibanja molekula u tekućini.

Temperatura ovisnost viskoznosti u plinovima je:

$$\eta \sim \sqrt{T} \qquad \text{jer je} \qquad v_{mik} \sim \sqrt{T}.$$

U pravim tekućinama proces difuzije je složeniji te se dobiva manji η na višim temperaturama.

Navier-Stokesova jednadžba

Jednadžba sačuvanja impulsa se može preurediti u:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r},t)\right]=\vec{f}-\vec{\nabla}p-\sum_{ij}\vec{e}_i\frac{\partial\Pi'_{ij}}{\partial x_j}$$

To je Eulerova jednadžba modificirana dodatnim članom trenja.
Član s trenjem se može preurediti:

$$\begin{aligned}\sum_{ij}\vec{e}_i\frac{\partial\Pi'_{ij}}{\partial x_j} &= -\eta\underbrace{\sum_{ij}\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{\Delta\vec{v}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}-(-\frac{2\eta}{3}+\zeta)\underbrace{\sum_{ij}\vec{e}_i\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}\\ &= -\eta\Delta\vec{v}-(\zeta+\frac{\eta}{3})\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\end{aligned}$$

Navier-Stokesova jednadžba

Pa se konačno dobiva jednadžba:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t) \right] = \vec{f} - \vec{\nabla} p + \eta \, \Delta \vec{v} + (\zeta + \frac{\eta}{3}) \, \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

U slučaju nestlačive tekućine član s divergencijom brzine je jednak nuli, te se dobiva:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t) \right] = \vec{f} - \vec{\nabla} p + \eta \, \Delta \vec{v}$$

Ovo je **Navier-Stokesova jednadžba**.