Zakoni sačuvanja - 2. dio

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 12. ožujka 2015.)

Pregled predavanja

Jednadžba kontinuiteta i meterijalna derivacija

Zakon sačuvanja energije

Jednadžba balansa entropije

Jednadžba kontinuiteta i materijalna derivacija

Između materijalne derivacije i jednadžbe kontinuiteta za neku fizikalnu veličinu (npr. F) postoji slijedeća veza:

$$\rho \frac{DF}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho F) + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} F)$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho F) + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} F) &= \rho \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} F + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) F + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) F \\
&= \rho \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) F \right)}_{\equiv \frac{DF}{Dt}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) \right)}_{\equiv 0} F \\
&= \rho \frac{DF}{Dt}
\end{aligned}$$

Zakon sačuvanja energije

Izvod jednadžbe sačuvanja energije polazi od jednadžbi za sačuvanje impulsa:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r},t)\right]=\vec{f}-\vec{\nabla}p-\sum_{ij}\vec{e}_i\frac{\partial\Pi'_{ij}}{\partial x_j}$$

odnosno:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\vec{f}-\sum_{ij}\vec{e}_i\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j},$$

gdje se uvela oznaka:

$$P_{ij}=p\,\delta_{ij}+\Pi'_{ij}.$$

Zakon sačuvanja energije

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \sum_{ij} \vec{e}_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j},$$

Množeći gornju jednažbu s $\vec{v}$, lijeva strana se može prikazati kao:

$$\begin{aligned} \rho \sum_i v_i \frac{D}{Dt} v_i &= \rho \sum_i (v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}) + \rho \sum_i v_i (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i \\ &= \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right] \frac{v^2}{2} = \rho \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2}, \end{aligned}$$

dok je desna strana pomonožena s $\vec{v}$ jednaka:

$$\vec{v} \cdot \vec{f} - \sum_{ij} v_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}. = \vec{v} \cdot \vec{f} - \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i P_{ij}) + \sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Zakon sačuvanja energije

Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2} &= \vec{v} \cdot \vec{f} - \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i P_{ij}) + \sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \vec{\nabla} \left(\rho \vec{v} \frac{v^2}{2} \right) . \end{aligned}$$

Kombinirajući ove dvije jednadžbe:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right)}_{\equiv E_k} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\rho v_j \frac{v^2}{2} + \sum_i v_i P_{ij} \right)}_{\text{struja } E_k} = \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{f}}_{\text{snaga}} + \underbrace{\sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{\text{trenje}}$$

Na lijevoj strani je jednadžba kontinuiteta koja iskazuje kako se gustoća kinetičke energije mijenja u vremenu. Na desnoj su gustoće izvora i ponora kinetičke energije.

Zakon sačuvanja energije

Izvori/ponori kinetičke energije su:

$$\sigma[E_k] = \vec{v} \cdot \vec{f} + \sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Prvi član predstavlja gubitak/dobitak u kinetičkoj energiji jer se čestice tekućine gibaju u vanjskom polju.

Drugi član sadrži gubitak kinetičke energije koji dolazi od viskoznog trenja, ali i zbog rada koji sustav čini kod adijabatske ekspanzije.

Zakon sačuvanja energije

Potencijalna energija u vanjskom polju će također imati izvore koji će kompenzirati gubitak/dobitak kinetičke energije zbog gibanja u vanjskom polju:

$$\sigma[E_p] = -\vec{v} \cdot \vec{f}.$$

Ako se tekućina sastoji od nekoliko komponenti koje se različito ponašaju u vanjskom polju (različiti naboji u električnom polju), potrebno je uzeti u obzir potencijalnu energiju svake pojedine komponente:

$$E_p = \sum_{\gamma} E_p^{(\gamma)}.$$

Svaka od komponenati ima svoje izvore:

$$\sigma[E_p^{(\gamma)}] = -\rho_\gamma \, \vec{v}_\gamma \cdot \vec{f}_\gamma.$$

Zakon sačuvanja energije

Neka je w_γ potencijalna energija jedinične mase u točki $\vec{r}$. Tada vrijedi jednadžba kontinuiteta za potencijalnu energiju:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\gamma \, w_\gamma) + \vec{\nabla}(\rho_\gamma w_\gamma \vec{v}) = -\rho_\gamma \vec{v}_\gamma \cdot \vec{f}_\gamma.$$

Potencijalna energija se može mijenjati samo gibanjem tekućine. **Ne postoji** kondukcijski mehanizam prenosa potencijalne energije.

Zakon sačuvanja energije

Ukupna energija mora biti sačuvana. Ne postoje izvori ukupne energije:

$$\sigma[E_k + E_p + U] = 0 \qquad \Rightarrow$$

Pre tome, izvori unutrašnje energije su:

$$\begin{aligned}
\sigma[U] &= -\sigma[E_k] - \sigma[E_p] \\
&= \underbrace{\sum_\gamma \rho_\gamma (\vec{v}_\gamma - \vec{v}) \cdot \vec{f}_\gamma}_{\text{difuzija}} \quad - \quad \underbrace{\sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{\text{viskozno trenje}} \qquad .
\end{aligned}$$

Ukoliko vanjsko polje jednako djeluje na sve komponente, tada je izvor unutrašnje energije zbog procesa difuzije jednak nuli:

$$\vec{f}_\gamma = \vec{f} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{f} \cdot \Big(\sum_\gamma \rho_\gamma (\vec{v}_\gamma - \vec{v})\Big) = 0.$$

Zakon sačuvanja energije

Jednadžba balansa unutrašnje energije glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, e) + \vec{\nabla}(\rho \vec{v} e \quad + \underbrace{\vec{w}}_{kondukcija}) = \sigma[U],$$

gdje e označava unutrašnje energije po jedinici mase, a $\vec{w}$ je struja unutrašnje energije zbog vođenje topline (kondukcije).

Ako nema trenja i ako je difuzijski član jednak nuli, tada vrijedi:

$$\rho \frac{De}{Dt} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) = -p\, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

pri čemu je:

$$P_{ij} = p\, \delta_{ij}.$$

Zakon sačuvanja energije

$$\rho \frac{De}{Dt} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) = -p\, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Desna strana jednadžbe se može preurediti.

Polazi se od:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= \vec{\nabla} \cdot (\frac{1}{\rho}\, \rho \vec{v}) = \frac{1}{\rho}\, \underbrace{(\vec{\nabla} \rho \vec{v})}_{-\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\rho} = \rho\, [\underbrace{-\frac{1}{\rho^2}\, \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho}} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\frac{1}{\rho})] \\
&= \rho\, [\, \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\,]\, (\frac{1}{\rho}) = \rho \left(\frac{D}{Dt}\, \frac{1}{\rho} \right)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{\rho} = v$ je volumen jedinične mase (ne miješati s brzinom $\vec{v}$!)

Zakon sačuvanja energije

Jednadžba sačuvanja unutrašnje energije:

$$\frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) = -p\,\frac{Dv}{Dt}$$

Ako se ova jednadžba prointegrira po sustavu zadane mase (ili zadanog broja čestica) dobiva se:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - p\,\frac{dV}{dt} \qquad (\text{ 1. zakon termodinamike}).$$

dQ je količina topline koja je procesom toplinskog vođenja (kondukcijom) prenesena u sustav koji se promatra.

Zakon sačuvanja energije

Konačni izraz zakona sačuvanje ukupne energije glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\frac{v^2}{2}+\rho\,e+\sum_\gamma \rho_\gamma w_\gamma\right)+$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{w}+\rho\,\vec{v}\,(e+\frac{v^2}{2})+\sum_\gamma \rho_\gamma \vec{v}_\gamma w_\gamma+\sum_i P_{ij} v_i\,\vec{e}_j\right)=0.$$

- Kondukcija unutrašnje energije (topline)
- konvekcija kinetičke i unutrašnje energije
- konvekcija potencijalne energije
- konduktivni prenos kinetičke energije

Jednadžba balansa entropije

Postoje dva doprinosa promjeni entropije nekog sustava volumena $\mathcal{V}$:

- doprinos koji dolazi od pritoka topline u sustav.

$$\frac{d_e S}{dt} = -\int_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}_S \cdot d\vec{S} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dt}$$

- te zbog razmjene topline (energije) među dijelovima sustava.

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_{\mathcal{V}} dV\, \sigma[S] \geq 0$$

Jednadžba balansa entropije

Svaka pojedina čestica tekućine nalazi se u lokalnoj ravnoteži, te je entropija funkcija energije e, volumena v i broja čestica n_γ:

$$s = s(e, v, n_\gamma).$$

Pri tome je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial e} &= \frac{1}{T} \\ \frac{\partial s}{\partial v} &= \frac{p}{T} \\ \frac{\partial s}{\partial n_\gamma} &= -\frac{\mu_\gamma}{T}. \end{aligned}$$

Također je:

$$T\, ds = de + p\, dv - \sum_\gamma \mu_\gamma\, dn_\gamma$$

Jednadžba balansa entropije

Slijedi da je

$$T\,\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\,\frac{Dv}{Dt} - \sum_\gamma \mu_\gamma\,\frac{Dn_\gamma}{Dt} \qquad\qquad /\cdot\rho$$

Te množeći jednadžbu s ρ, i koristeći identitet:

$$\rho\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\ldots) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\ldots)$$

$$\begin{aligned}
T\rho\frac{Ds}{Dt} &= T\left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\,s)\right] \\
&= \underbrace{\left[\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\,e)\right]}_{=-\vec{\nabla}\cdot\vec{w}+\sigma[U]} + p\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \sum_\gamma \mu_\gamma \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho n_\gamma) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}n_\gamma)\right]}_{=\sigma[M_\gamma]+\vec{\nabla}\cdot\rho_\gamma(\vec{v}-\vec{v}_\gamma)}
\end{aligned}$$

Jednadžba balansa entropije

gdje se stavilo da je $\rho_\gamma = \rho n_\gamma$. μ_γ je definirano po molekularnoj masi.

Iz prijašnjeg računa je poznato:

$$\begin{aligned} \sigma[U] &= \sum_\gamma \rho_\gamma(\vec{v}_\gamma - \vec{v}) \cdot \vec{f}_\gamma - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \sum_{ij} \Pi'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ \sigma[M\gamma] &= \nu_\gamma \, M_\gamma \, w \end{aligned}$$

Dobiva se:

$$\begin{aligned} T\left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}\, s)\right] = & - \; (\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) - \sum_{ij} \Pi'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sum_\gamma \rho_\gamma(\vec{v}_\gamma - \vec{v}) \cdot \vec{f}_\gamma \\ & - \sum_\gamma \mu_\gamma \left[\nu_\gamma \, M_\gamma \, w + \vec{\nabla} \cdot \rho_\gamma(\vec{v} - \vec{v}_\gamma)\right] \end{aligned}$$

Jednadžba balansa entropije

Preuređivanje izraza:

$$
\begin{aligned}
T\left[\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\, s)\right] = \quad & - \quad T\,\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{w}}{T} - T\,\vec{\nabla}\cdot\sum_{\gamma}\frac{\mu_\gamma}{T}\,\rho_\gamma\,(\vec{v}-\vec{v}_\gamma) \\
& - \quad \sum_{ij}\Pi'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - w\underbrace{\sum_{\gamma}\nu_\gamma M_\gamma \mu_\gamma}_{=-A} \\
& - \quad T\sum_{\gamma}\rho_\gamma(\vec{v}_\gamma-\vec{v})\left[\vec{\nabla}\left(\frac{\mu_\gamma}{T}\right) - \frac{\vec{f}_\gamma}{T}\right] \\
& + \quad T\,\vec{w}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right)
\end{aligned}
$$

A je kemijski afinitet.

Jednadžba balansa entropije

Konačno se dobiva jednadžba balansa entropije:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} \quad &+ \quad \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v}\, s + \frac{\vec{w}}{T} + \sum_{\gamma} \frac{\mu_\gamma}{T}\, \rho_\gamma\, (\vec{v} - \vec{v}_\gamma) \right] = \sigma[S] \\
= \quad &- \quad \frac{1}{T} \sum_{ij} \Pi'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} && \text{tenzorski član} \\
&+ \quad \frac{w\, A}{T} && \text{skalarni} \\
&+ \quad \sum_{\gamma} \rho_\gamma (\vec{v} - \vec{v}_\gamma) \left[\vec{\nabla} \left(\frac{\mu_\gamma}{T} \right) - \frac{\vec{f}_\gamma}{T} \right] && \text{vektorski} \\
&+ \quad \vec{w} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right) && \text{vektorski}
\end{aligned}
$$

Jednadžba balansa entropije

Postoji više različitih izvora koji stvaraju entropiju. Općenito gustoća izvora entropije se može zapisati kao:

$$\sigma[S] = \sum_{\alpha} J_{\alpha} \, X_{\alpha}$$

gdje su

$$\begin{aligned} J_{\alpha} &= \text{termodinamičke struje} \\ X_{\alpha} &= \text{termodinamičke sile} \end{aligned}$$

Termodinamičke sile su vanjski uvjeti koji **izvode** sustav iz termodinamičke ravnoteže. Kao rezultat djelovanja termodinamičkih sila u sustavu se pojavljuju termodinamičke struje.

Jednadžba balansa entropije

U termodinamičkoj ravnoteži vrijedi: $J_\alpha = 0$ i $X_\alpha = 0$, tj. ne postoje izvori entropije. Ona je već maksimalna.

U sustavu koji je **blizu ravnotežnog stanja** struje su linearna kombinacija termodinamičkih sila:

$$J_\alpha = \sum_\beta L_{\alpha\beta} X_\beta .$$

$L_{\alpha\beta}$ su tz. **kinetički Onsagerovi koeficijenti**.
Oni opisuju transportna svojstva nekog sustava (prijenos topline, naboja,...)
Vrijedi simetrija:

$$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha}$$

pa je:

$$\sigma[S] = \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta > 0.$$

Jednadžba balansa entropije

U izrazu za balans entropije tekućine, mogu se identificirati ove sile i struje:

J_α	X_α		
w	$\frac{A}{T}$	skalarno veličina	(kemijska reakcija)
$\vec{w}$	$\vec{\nabla}\frac{1}{T}$	vektorska veličina	(vođenje topline)
$\partial_i v_j$	$\frac{1}{T}\Pi'_{ij}$	tenzorska veličina	(viskozno trenje)

gdje je korištena ova oznaka:

$$\partial_i v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}.$$