Idealna tekućina

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 31. ožujka 2016.)

Pregled predavanja

Idealna tekućina

U ovom predavanju razmatra se idealna jednokomponentna tekućina, za koju vrijedi:

- Nema viskoznosti: η i ζ = 0.
- Nema temperaturnih gradijenata. Nema prenosa topline, $\vec{w}$ = 0.
- Vrijedi zakon sačuvanja entropije:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, s) + \vec{\nabla}(\rho\, s\, \vec{v}) = 0. \qquad \text{(Gibanje je \textbf{adijabatsko}.)}$$

- Ako je s=konst. svuda, onda je to **izoentropsko** gibanje.

Uvodi se **entalpija** po jediničnoj masi, $w = e + pV$. Vrijedi:

$$dw = T \underbrace{ds}_{=0} + v\, dp = \frac{1}{\rho}\, dp \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\rho}\, \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} w.$$

Jednadžba gibanja

Eulerova jednadžba postaje:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p(\vec{r}, t) \quad + \underbrace{\vec{g}}_{\text{gravitacija}} = -\vec{\nabla} w + \vec{g}$$

Na lijevoj strani prostorne derivacije mogu se preurediti, koristeći:

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \qquad \Rightarrow$$

Jednadžba gibanja:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla} w + \vec{g}. \qquad /\vec{\nabla} \times \ldots$$

Množeći jednadžbu s rotacijom konačno se dobiva:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})\right]$$

Jednadžba gibanja

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})\right]$$

Ovo je skup od 3 PD jednadžbe koje sadrže **samo brzine** kao nepoznanice. Nema termodinamičkih veličina kao Eulerova jednadžba. Taj skup jednadžbi treba nadopuniti rubnim uvjetima, tj.:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_{\text{rub}} = 0.$$

Općenito gibanje tekućine zadano je s 5 veličina, $\vec{v}$, ρ i p, a za to je potrebno imati 5 nezavisnih jednadžbi: Npr.

- 3 Eulerove jednadžbe za $\vec{v}$,
- jednadžbu kontinuiteta za ρ i
- $s = konst.$ (jednadžba sačuvanja entropije).

Hidrostatika

Ako se tekućina ne giba, $\vec{v} = 0$, dobiva se:

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

Pretpostavljajući da je smjer gravitacije negativna strana z-osi, dobiva se:

$$p = -\rho\, g\, z + konst.$$

Ako je:

$$p = p_0 \text{ za } z = h \qquad \Rightarrow \qquad p = p_0 + \rho\, g\, (h - z).$$

Uz pretpostavku da je ρ konstantno.

Bernoullijeva jednadžba

U slučaju stacionarnog gibanja:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \text{ za svaki } \vec{r}.$$

iz Eulerove jednadžbe se može izvesti **Bernoullijeva jednadžba.**

Stacionarna jednadžba se množi s vektorom paralelnim sa strujnicom:

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla} w + \vec{g} \qquad / \cdot \vec{l} \quad (\sim \vec{v})$$

te se dobiva:

$$\begin{aligned}
\vec{l} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{v^2}{2} + w + g\, z \right] &= 0 \qquad \Rightarrow \\
\frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{v^2}{2} + w + g\, z \right] &= 0 \qquad \Rightarrow \\
\frac{v^2}{2} + w + g\, z &= konst.|_{\text{strujnica}}
\end{aligned}$$

Bernoullijeva jednadžba

$$\frac{v^2}{2} + w + g\,z = konst.\Big|_{\text{strujnica}}$$

Ovo je poznata **Bernoullijeva jednadžba**.

Veličina na lijevoj strani je konstantna ali **samo uzduž pojedine strujnice**. Različite strujnice mogu imati različite vrijednosti konstante. Pri tome je:

$$w = e + \frac{p}{\rho} \qquad \text{(entalpija)}$$

Bernoullijeva jednadžba izražava zakon sačuvanja energije, u ovom slučaju uzduž pojedinih strujnica.

Zakoni sačuvanja

Zakoni sačuvanja u idealnoj tekućini glase:

- Energija:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\, v^2}{2} + \rho\, e\right) + \vec{\nabla}\left[\rho\, \vec{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right] = 0.$$

- Količina gibanja:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Pi_{ij} = 0,$$

gdje je tenzor toka impulsa:

$$\Pi_{ij} = p\, \delta_{ij} + \rho\, v_i v_j.$$

Zakon sačuvanja cirkularne brzine

Osim zakona sačuvanja energije, impulsa i entropije postoji i zakon sačuvanja **cirkularne brzine**.

Cirkularna brzina se definira za zatvorenu konturu (petlju) Γ kao:

$$\Gamma(t) = \oint_\Gamma \vec{dl} \cdot \vec{v}.$$

Kontura Γ se u vremenu premješta i deformira kako se čestice tekućine gibaju. Vremenska promjena cirkularne brzine je:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{dt} &= \oint \vec{dl} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{= \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} w} + \oint \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{dl}}_{= d\frac{\vec{dl}}{dt} = d\vec{v}} \cdot \vec{v} \\
&= -\oint \vec{dl} \cdot \vec{\nabla} w + \oint \vec{dv} \cdot \vec{v} \\
&= w\Big|_{\text{početak}}^{\text{kraj}} + \frac{v^2}{2}\Big|_{\text{početak}}^{\text{kraj}} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Zakon sačuvanja cirkularne brzine

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Cirkularna brzina je sačuvana. Zakon sačuvanja cirkularne brzine poznat je i kao **Kelvinov teorem**.

Kelvinov teorem vrijedi uz uvijet da je gibanje **izoentropsko**, $s =$ konst.

Konturni integral iz definicije cirkularne brzine se može prevesti u površinski, pa izlazi da je:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = konst.$$

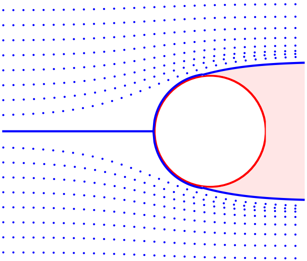
Vektor $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ naziva se **vrtložnost**. Neovisnost vrtložnosti o vremenu implicira da se vrtlozi gibaju zajedno s tekućinom.

Potencijalno gibanje

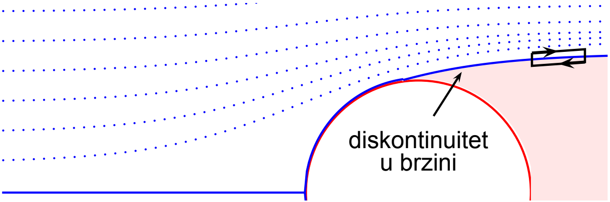
Ako je $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ na jednoj točki na strujnici, onda to vrijedi i za cijelu strujnicu. (Kod nestacionarnog gibanja to vrijedi za trajektorije čestica).

Ako je $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ svuda u prostoru, onda se kaže da je to **potencijalno ili irotaciono (bezvrtložno) strujanje**.

Kod problema opticanja nekog tijela, u području prostora *daleko* ispred tijela, brzina tekućine je konstantna pa je i $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Sve strujnice koje dolaze iz bekonačnosti, prolaze oko tijela i udaljavaju se u područje prostora iza tijela imat će $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$.



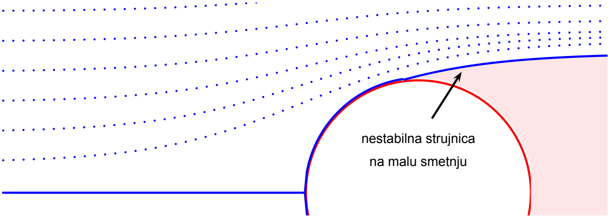
Potencijalno gibanje



Opticanje tijela općenito **nije** slučaj bezvrtložnog (potencijalnog) gibanja. Uzrok je postojanje strujnica koje **ne dolaze** iz beskonačnosti, nego nastaju na površini samom tijelu, te se protežu u područje iza tijela.

Idealna tekućina dopušta potojanje takvih strujnica. To je posljedica toga što tangencijalna komponenta brzine na površini tijela nije jednaka nuli, nego je konačna. Treba naglasiti, da jednadžbe gibanja ne daju jednoznačno rješenje. Postoji familija rješenja s diskontinuitetima u brzinama, koji počinju na tijelu te se protežu u područje iza tijela.

Potencijalno gibanje



Sva dobivena rješenja **nisu** fizikalna, tj. **nisu stabilna** na male smetnje.

Kasnije će se vidjeti da su tangencijalni diskontinuiteti ***apsolutno nestabilni*** *te da oni vode na pojavu turbulencija u realnim tekućinama*.

U realnim tekućinam postoji viskoznost te je brzina tekućina na samoj površinini tijela jednaka nuli. U samoj blizini tijela postoji **granični sloj** unutar kojeg se događa prijelaz iz viskoznog gibanja (dominacija viskoznosti) u područje u kojem se viskoznost može zanemariti.

Potencijalno gibanje

Ono što se događa u graničnom sloju će odrediti koje je rješenje od beskonačno mogućih fizikalno (stabilno na malu smetnju).

U mnogim situacijama potencijalno gibanje idealne tekućine može dati korektnu sliku i za gibanje realne tekućine, svuda osim u neposrednoj blizini tijela (granični sloj) te u relativno uskom području iza tijela (tj. u tragu).

Male oscilacije

Gibanje tekućine oko tijela koje čini male oscilacije također je približno bezvrtložno. Uvijet je da su amplitude oscilacija, a, puno manje od dimenzija samog tijela, l. Tada je:

$$
\begin{aligned}
|\partial_{x_i} v| &\sim \frac{u}{l} && \text{(prostorne derivacije)} \\
\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| &\sim \omega\, v \sim \frac{u^2}{a} && \text{(period } T \sim \frac{a}{u}\text{)} \\
|(v\nabla)v| &\sim \frac{u^2}{l} \ll \left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \sim \frac{u^2}{a}
\end{aligned}
$$

pa se Eulerova jednadžba svodi na:

$$
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq \vec{\nabla} w \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \simeq 0. \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \simeq konst.
$$

Također je:

$$
\vec{v}\ \text{oscilira} \quad \Rightarrow \quad \overline{\vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\vec{\nabla} \times \vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \simeq 0
$$

Potencijalno gibanje

Ako je svuda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

kaže se da je gibanje tekućine **potencijalno**.

Tada je brzinu moguće prikazati kao gradijent nekog potencijala:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi.$$

Uvrštavajući to u Eulerovu jednadžbu:

$$\vec{\nabla}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right] = 0,$$

dobiva se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = konst.(t)$$

$konst.(t)$ ne ovisi o položaju ali je moguća vremenska ovisnost.

Potencijalno gibanje

Vremenski ovisna konstanta može se pribrojiti potencijalu, jer to ne utječe na brzinu koja je dana prostornim gradijentom. Dakle:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = 0.$$

Ako se promatra stacionarno gibanje vrijedi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v^2}{2} + w = konst.$$

Prije izvedena Bernoullijeva jednadžba odnosila se je na svaku strujnicu posebno.

Sada dobivena Bernoullijeva jednadžba vrijedi za cijelu tekućinu, međutim, uvjet je da je gibanje tekućine bezvrtložno (potencijalno).

Nestlačiva tekućina

Ako je $\rho(\vec{r})$ = konst. svuda, onda je:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.$$

Ova jednadžba, zajedno s onom prije izvedenom za brzinu,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})\right]$$

čini osnovni skup jednadžbi koje je potrebno riješiti. Sama gustoća, ρ, više se ne pojavljuje kao nepoznata funkcija.

Nestlačiva tekućina - stacionarni slučaj

Ako se promatra stacionarno gibanje, tada se dobiva Bernoullijeva jednadžba, koja, međutim, više se sadrži unutrašnju energiju (entalpiju), nego samo tlak:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z = konst.$$

Naime, unutrašnja energija, e, je konstanta koja više ne ovisi o položaju.

$$\left.\begin{array}{rcl} s & = & konst. \\ \rho & = & konst. \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad de = Tds - pdv = 0 \quad \Rightarrow \quad e = konst.$$

Nestlačiva tekućina - potencijalno gibanje

Ako se radi o potencijalnom gibanju nestlačive tekućine, tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{\nabla} \times \vec{v} & = & 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad \text{pro čemu je} \quad \Delta\phi = 0.$$

Potencijal zadovoljava Laplaceovu jednadžbu.

Također vrijedi Bernoullijeva jednadžba u kojoj se pojavljuje tlak umjesto entalpije:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = 0.$$

Nestlačiva tekućina - potencijalno gibanje

Iz Bernoullijeve jednadžbe izlazi da je u slučaju stacionarnog potencijalnog gibanja nestlačive tekućine tlak maksimalan u točkama gdje tekućina miruje:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = konst. = \frac{p_{max}}{\rho}$$

odnosno

$$p_{max} = p + \frac{\rho v^2}{2} = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2},$$

gdje se je pretpostavilo da su p_∞ i v_∞ redom tlak i brzina tekućine u beskonačnosti.

Uvjet nestlačivosti

Da bi se neka tekućina ili plin mogli tretirati kao nestlačivi potrebno je da su relativne promjene gustoće zanemarivo male:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$$

Do promjena u gustoći dolazi zbog promjena u tlaku:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{1}{\rho} \underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)}_{\frac{1}{c^2}} \underbrace{\Delta p}_{\sim \rho\, v^2} \simeq \frac{v^2}{c^2}$$

Dakle, plin ili tekućina se mogu tretirati kao nestlačivi ako je brzina gibanja tekućine puno manja od brzine zvuka u tekućini:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v}{c} \ll 1$$

To vrijedi ako je gibanje stacionarno.

Uvjet nestlačivosti

U slučaju nestacionarnog gibanja potrebni su dodatni uvjeti.

Neka su τ i l vrijeme i dužina preko koje se brzina tekućine značajno mijenja. Prema Eulerovoj jednadžbi:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{\rho\, l} \quad \Rightarrow \quad \Delta p \sim \frac{l\, \rho\, v}{\tau}$$

Tada je:

$$\Delta \rho \sim \frac{1}{c^2} \Delta p \sim \frac{l\, v}{c^2 \tau}\, \rho \quad \text{odnosno vrijedi} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{l\, v}{c^2 \tau}.$$

Tekućina je približno nestlačiva ako je u jednadžbi kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ll -\nabla(\rho\, v) \quad \text{odnosno ako vrijedi} \quad \frac{\Delta \rho}{\tau} \ll \frac{\rho\, v}{l}$$

Odavde slijedi da treba biti ispunjeno:

$$\underbrace{\frac{\Delta\rho}{\rho}}_{\frac{l\,v}{c^2\tau}} \ll \frac{v\,\tau}{l} \qquad \Rightarrow$$

Tekućina/plin se mogu smatrati nestlačivim i u nestacionarnom slučaju ako je:

$$\frac{l}{\tau} \ll c \qquad \text{ili} \qquad \tau \gg \frac{l}{c}$$

To implicira da su vremenske promjene brzine tekućine puno sporije od vremena potrebnog zvuku da pređe udaljenost preko kojih se brzina značajnije mijenja.

2D nestlačiva tekućina

Kada gibanje tekućine nema treće komponente brzine, te brzine i termodinamičke veličine ne ovise o trećoj dimenziji govori se o dvodimenzionalnom (2D) ili planarnom strujanju. Npr. stujanje koje ima cilindričnu simetriju može se smatrati dvodimenzionalnim.

Dvodimenzionalnost u mnogome pojednostavljuje rješavanje inače kompliciranih problema.

Ako je tekućina nestlačiva, onda:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Ta je jednadžba automatski zadovoljena ako je:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

2D nestlačiva tekućina

Rotacija brzine:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{k} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \vec{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi = \vec{k}\, \Delta \Psi .$$

Uvrštavanjem u jednadžbu koju zadovoljava brzina idealne tekućine:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right]$$

dobiva se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi = 0.$$

jednadžba za nepoznatu funkciju $\Psi(x, y)$.

2D nestlačiva tekućina

Jednadžba za stujnicu glasi:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \qquad \Rightarrow \qquad v_y\, dx - v_x\, dy = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d\Psi = 0.$$

Uzduž stujnice funkcija Ψ je konstantna. Ψ je tz. **funkcija strujnice**.

2D nestlačiva tekućina

Tok tekućine kroz neku površinu (krivulju) dan je normalnom komponentom brzine na krivulju. Ako je jedinični vektor duž strujnice jednak:

$$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j},$$

tada je okomiti vektor na stujnicu:

$$\vec{dn} = -dy\vec{i} + dx\vec{j}$$

Tok tekućine (količina tekućine koja protekne u jedinici vremena kroz krivulju) je:

$$Q = \rho \int_1^2 v_n dl = \rho \int (-v_y\, dx + v_x\, dy) = \rho \int_1^2 d\Psi = \rho\left(\Psi_2 - \Psi_1\right).$$

Količina tekućine koja protekne u jedninici vremena kroz neku krivulju dana je razlikom vrijednosti funkcije strujnice na početku i na kraju krivulje.

2D nestlačiva tekućina - potencijalno gibanje

Ako se radi o potencijalnom gibanju, tada je brzinu tekućine moguće prikazati i preko potencijala, ϕ:

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = +\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\
v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}
\end{aligned}
$$

Ovdje je moguće prepoznati Cauchyeve relacije koje zadovoljavaju analitičke funkcije kompleksne varijable, $z = x + \imath\, y$. Uvodimo analitičku funkciju u, tz. **kompleksni potencijal**:

$$u = \phi + \imath\, \Psi = u(x, y) \equiv u(x + \imath\, y).$$

Brzine su dane derivacijom analitičke funkcije u:

$$\frac{du}{dz} = v_x - \imath\, v_y$$

2D nestlačiva tekućina - potencijalno gibanje

Integral derivacije kompleksnog potencijala u po zatvorenoj krivulji u 2D kompleksnoj ravnini jednak je cirkularnoj brzini Γ:

$$\begin{aligned} \oint dz \frac{du}{dz} &= \oint (dx + \imath\, dy)(v_x - \imath\, v_y) \\ &= \underbrace{\oint (v_x\, dx + v_y\, dy)}_{\text{cirkularna br.}} + \imath \underbrace{\oint (v_x\, dy - v_y\, dx)}_{\text{tok kroz krivulju}} \end{aligned}$$

Ako nema izvora tekućine unutar zatvorene krivulje, tok kroz krivulju je jednak nuli. Tada je:

$$\Gamma = \oint dz \frac{du}{dz} = 2\pi\imath \sum_i A_i,$$

gdje su A_i rezidumi derivacije kompleksnog potencijala koji se nalaze unutar krivulje integracije. Po iznosu rezidumi trebaju biti čisto imaginarni.