Idealna tekućina - 2. dio

« Hidrodinamika »

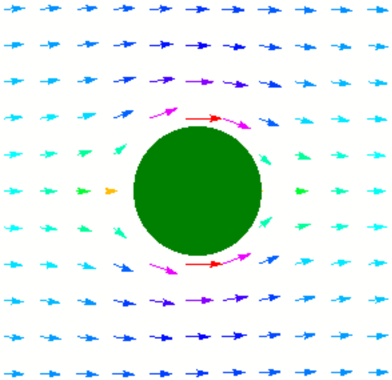
Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 31. ožujka 2016.)

Pregled predavanja

Promatra se problem opticanja tekućine oko nekog nepomičnog tijela konačnih dimenzija.



Potencijalno opticanje nestlačive tekućine

Brzina gibanja $\vec{v}$ tekućine poremećena je prisustvom prepreke (tijela) tek u blizini samog tijela. Daleko od tijela brzina tekućine je konstantna i jednaka $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{u}$.

Potpuno ekvivalentni problem je slučaj u kojem se tijelo uniformnom brzinom -$\vec{u}$ giba kroz inače nepomičnu tekućinu. U ovom slučaju, brzina tekućine može se označiti s velikim slovim $\vec{V}(\vec{r})$. Brzine su u prvom i u drugom slučaju povezane Galileovom transformacijom:

$$\vec{V}(\vec{r}) = -\vec{u} + \vec{v}(\vec{r}),$$

pri čemu vrijedi:

$$|\vec{V}(\vec{r})| \lim_{|\vec{r}|\to\infty} \to 0.$$

Ako se radi o potencijalnom gibanju nestlačive tekućine. tada je:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} &= 0 \\ \vec{V}(\vec{r}) &= \vec{\nabla}\phi \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = 0.$$

Potencijalno opticanje nestlačive tekućine

Opće rješenje Laplaceove jednadžbe je funkcija koja se može razviti u red po kuglinim funkcijama (multipolni razvoj):

$$\begin{aligned}\phi &= \underbrace{A_1 + \frac{A_2}{r}}_{\text{sferno sim.}} + \underbrace{\vec{B}_1 \cdot \vec{r} + (\vec{B}_2 \cdot \vec{\nabla})\frac{1}{r}}_{\text{dipolni član}} + \underbrace{\sum_{i,j} C_1^{(ij)}\, x_i\, x_j + \ldots}_{\text{multipoli višeg reda}} \\ &= \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta,\varphi)\,(A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}).\end{aligned}$$

Neka je koordinatni sustav okrenut tako da z-os gleda u smjeru gibanja tekućine $\vec{u}$.

Za opis gibanja tekućine daleko od tijela dovoljno je uzeti u obzir samo najniže netrivijalne članove u multipolnom razvoju.

Potencijalno opticanje nestlačive tekućine

Prvi netrivijalni član je sfernosimetrični potencijal:

$$\Phi \sim \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{V}(\vec{r}) \sim \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Međutim to **nije** dobro riješenje jer ono odgovara postojanju izvora tekućine. Naime tok tekućine kroz zatvorenu površinu oko tijela je različit od nule

$$\int d\vec{S}\,\vec{V} \sim -\frac{1}{r^3}\int d\Omega\, r^2 \underbrace{\vec{n}\,\vec{r}}_{=r} = -4\pi.$$

a to nije problem koji se razmatra.

Prema tome, $A_2 \equiv 0$. (Prvi član A_1 je irelevantan za brzinu!)

Potencijalno opticanje nestlačive tekućine

Prvi slijedeći netrivijalni član je dipolni. Dakle:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{B_2} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r}}_{= -\frac{\vec{B_2} \cdot \vec{r}}{r^3}} = -\frac{\vec{B_2}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{B_2} \cdot \vec{r})}{r^5}$$

Vektorski koeficijent $\vec{B_2}$ u razvoju nije proizvoljan. On se mora izabrati tako da je okomita komponenta brzine tekućine na površini tijela točno jednaka okomitoj komponenti gibanja samog tijela.

Ako je tijelo proizvoljne geometrije, potrebno je uzeti u obzir i ostale članove u multipolnom razvoju. U najjednostavnijoj geometriji kada se razmatra opticanje oko kugle, dovoljno uzeti u obzir samo dipolni član. Svi ostali članovi u multipolnom razvoju, zbog rubnog uvjeta, bit će jednaki nuli. Neka je R_0 radijus kugle.

Opticanje kugle

Rubni uvjet:

$$V_n = \vec{V} \cdot \vec{n}|_{r=R_0} = -u_n = -\vec{u} \cdot \vec{n}|_{r=R_0}$$

gdje je $\vec{n} = \vec{r}/r$. Slijedi da je:

$$\begin{aligned} V_n &= \left[-\frac{\vec{B_2}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{B_2} \cdot \vec{r})}{r^5} \right] \cdot \frac{\vec{r}}{r}\bigg|_{r=R_0} = \frac{2(\vec{B_2} \cdot \vec{R_0})}{R_0^4} \\ &= -\frac{(\vec{u} \cdot \vec{R_0})}{R_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B_2} = -\vec{u}\frac{R_0^3}{2}. \end{aligned}$$

Konačni izraz za brzinu tekućine:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{V} = \vec{u} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 \right] - \frac{3}{2} \left(\frac{R_0}{r} \right)^3 \frac{\vec{r}(\vec{u} \cdot \vec{r})}{r^2}.$$

Kinetička energija opticanja

Ukupna kinetička energija tekućine umanjena je zbog poremećaja oko tijela kojeg optiče. U inercijalnom sustavu u kojem tekućina miruje to odgovara kinetičkoj energiji tekućine koju tijelo vuče za sobom gibajući se brzinom -$\vec{u}$.

Kinetička energija sadržana unutar volumena V (sfera radijusa R) oko tijela je:

$$E_k = \frac{\rho}{2}\int dV\vec{V}^2 = \frac{\rho}{2}\underbrace{\int dV\,\vec{u}^2}_{=\vec{u}^2\ (V-V_0)} + \frac{\rho}{2}\int dV(\vec{V}+\vec{u})\cdot\underbrace{(\vec{V}-\vec{u})}_{\vec{\nabla}(\phi-\vec{u}\cdot\vec{r})}$$

gdje je V_0 volumen samog tijela. Podintegralna funkcija u drugom integralu je:

$$(\vec{V}+\vec{u})\cdot\vec{\nabla}(\phi-\vec{u}\cdot\vec{r}) = \vec{\nabla}[(\vec{V}+\vec{u})(\phi-\vec{u}\cdot\vec{r})]$$

pa se integral može prevesti u površinski:

Kinetička energija opticanja

$$
\begin{aligned}
E_k &= \rho\,(V - V_0)\,\frac{\vec{u}^2}{2} \quad + \frac{\rho}{2}\int dV\,\vec{\nabla}[(\vec{V}+\vec{u})(\phi - \vec{u}\cdot\vec{r})] \\
&= \rho\,(V - V_0)\,\frac{\vec{u}^2}{2} \quad + \frac{\rho}{2}\int_{S_V} d\vec{S}\cdot(\vec{V}+\vec{u})(\phi - \vec{u}\cdot\vec{r}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{\rho}{2}\int_{S_T} \underbrace{d\vec{S}\cdot(\vec{V}+\vec{u})}_{=0}(\phi - \vec{u}\cdot\vec{r}) \\
&= \rho\,(V - V_0)\,\frac{\vec{u}^2}{2} \quad + \frac{\rho}{2}\int_{S_V} d\Omega\, R\left[-\frac{\vec{B}_2\cdot\vec{R}}{R^3} - \vec{u}\cdot\vec{R}\right]\left[\vec{u}\cdot\vec{R} + \frac{2\vec{B}_2\cdot\vec{R}}{R^3}\right] \\
&= \rho\,\left(\frac{4\pi\,R^3}{3} - V_0\right)\frac{\vec{u}^2}{2} - \frac{\rho\,R^3}{2}\underbrace{\int d\Omega\,(\vec{u}\cdot\vec{n})^2}_{=\frac{4\pi}{3}\vec{u}^2} - \frac{3\rho}{2}\underbrace{\int d\Omega\,(\vec{B}_2\cdot\vec{n})(\vec{u}\cdot\vec{n})}_{=\frac{4\pi}{3}(\vec{B}_2\cdot\vec{u})}
\end{aligned}
$$

Kinetička energija opticanja

Integrira se po području koje sadrži samo tekućinu. Prilikom prelaska na površinski integral pojavljuje se integracija po vanjskoj površini S_V (sferi radijusa R), i integracija po površini tijela S_T (općenito nepravilnog). Površinski integral po površini tijela isčezava zbog rubnog uvjeta koje gibanje tekućine zadovoljava. Kod integracije po vanjskoj površini zanemareni su članovi višeg reda koji isčezavaju kada radijus površine ide u beskonačnost.

Stoga je kinetička energija tekućine:

$$E_k = \frac{\rho}{2}\left[4\pi(\vec{B}_2 \cdot \vec{u}) - V_0\vec{u}^2\right].$$

Kinetička energija opticanja

U slučaju opticanja kugle nađeno je da je:

$$\vec{B_2} \sim \vec{u}.$$

Kod tijela nepravilnog oblika točni izraz za $\vec{B_2}$ treba tek ustanoviti rješavanjem jednadžbi uz zadovoljavanje rubnih uvjeta.

Međutim, između vektora $\vec{B_2}$ i brzine $\vec{u}$ mora postojati linearna veza bez obzira na oblik tijela. Vektor $\vec{B_2}$ je različit od nule samo ako je brzina $\vec{u}$ različita od nule. Opća linearna veza među komponentama vektora tih vektora može se prikazati kao:

$$(B_2)_i = \sum_j b_{ij} u_j,$$

gdje je b_{ij} matrica čije su komponente specifične za vrstu tijela koje se promatra.

Kinetička energija opticanja

Konačni izraz za kinetičku energiju tekućine koju tijelo gibanjem vuče za sobom je:

$$E_k = \frac{\rho}{2}\left[4\pi(\vec{B}_2 \cdot \vec{u}) - V_0\vec{u}^2\right] = \sum_{i,j} \frac{m_{ij}}{2}\, u_i\, u_j$$

gdje je

$$m_{ij} = 4\pi\, \rho\, b_{ij} - \rho\, V_0\, \delta_{ij}.$$

Veličina m_{ij} figurira kao vrst tenzora mase. Masa više nije skalarna veličina, nego je različita za različite orjentacije tijela u odnosu na smjer gibanja.

Impuls tekućine kod opticanja

Impuls tekućine koju tijelo vuče za sobom može se izračunati na sličan način kao što je računata kinetička energija. Pri tome je moguća pojava i divergencija što ovisi o području prostora koji ispunjava tekućina.

Postoji i jednostavniji način da se dođe do izraza za impuls tekućine.

Pod djelovanjem neke vanjske sile, $\vec{F}$, tijelo će se ubrzavati. Zbog međudjelovanja tijela i tekućine, vanjska sila vrši rad i na ubrzavanje tekućine oko tijela. Taj dio rada jednak je:

$$\vec{F} \cdot \vec{u} \Delta t = \Delta E = \sum_{i,j} m_{ij} u_i \Delta u_j = \vec{u} \cdot \underbrace{\sum_{i,j} m_{ij} \Delta u_j \vec{e}_i}_{= \Delta \vec{P}} .$$

Veličina $\Delta \vec{P}$ može se identificirati s promjenom impulsa tekućine zbog djelovanja vanjske sile.

Impuls tekućine kod opticanja

Stoga je impuls tekućine:

$$\vec{P} = \sum_{i,j} m_{ij} u_j \vec{e}_i = 4\pi\ \rho\ \vec{B}_2 - \rho\ V_0\ \vec{u}.$$

Pod djelovanjem vanjske sile impuls tekućine se mijenja:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

To je sila kojom tijelo djeluje na tekućinu. Postoji i sila reakcije kojom tekućina djeluje na tijelo i koja je suprotnog predznaka. Sila djelovanja tekućine na tijelo je:

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Ova sila općenito **nije** kolinearna s brzinom $\vec{u}$. Komponeta sile koja je kolinearna s brzinom zove se **sila vučenja** (drag force), dok komponeta sile koja je okomita na smjer brzine zove se **sila uzgona** (lift force).

Impuls tekućine kod opticanja

Ako je gibanje tijela u tekućini jednoliko, onda je impuls tekućine konstantan - neovisan o vremenu. To znači da su sile vučenja i uzgona jednake nuli. Ovo je poznato kao **d'Alembertov** paradoks.

Ako bi npr. postojala sila vučenja (različita od nule), to bi značilo da je potrebno stalno primjenjivati silu kako bi se održalo stacionarno gibanje tijela. Ta sila treba poništiti silu vučenja koja dolazi od tekućine. To pak znači stalno ulaganje energije koja se kroz silu vučenja prenosi na gibanje tekućine. Ova se uložena energija treba izgubiti ili kroz trenje ili kroz tok energije u beskonačnost. Međutim trenja u idealnoj tekućini nema, a ne postoji ni tok energije prema beskonačnosti jer brzina tekućine suviše brzo opada s udaljenošću. Stoga nema energijskih gubitaka kod opticanja idealne nestlačive tekućine.

Impuls tekućine kod opticanja

A ne postoji ni sila vučenja niti sila uzgona koja bi vršila rad nad tijelom.

Ovo vrijedi samo ako tekućina ispunjava prostor kompletno. U sustavu sa slobodnom površinom (jezero, more, bazen) moguća je pojava valova koji mogu odvoditi energiju u beskonačnost. To će djelovati kao jedna dodatna sila na tijelo (wave drag) koja će ga usporavati.

Titranje tijela u tekućini

Ukoliko tijelo uronjeno u tekućinu titra, te ako su amplitude oscilacija mnogo manje od dimenzija tijela, gibanje tekućine je potencijalno (bezvrtložno).

Pri tome će vanjska sila, pod čijim utjecajem tijelo titra, morati ubrzavati i samu tekućinu. Sila djeluje na ubzanje tijela, ali i također i na promjenu impulsa tekućine:

$$\underbrace{M\,\frac{d\vec{u}}{dt}}_{\text{tijelo}} + \underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{\text{tekućina}} = \vec{F}(t),$$

gdje se pretpostavilo da je masa tijela M. Jednadžbe gibanja:

$$\sum_i \frac{du_i}{dt}(M\,\delta_{ij} + m_{ij}) = F_j(t),$$

opisuju titranje tijela u tekućini pod djelovanjem vanjske sile $\vec{F}(t)$.