# Idealna tekućina - 3. dio

## « Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 31. ožujka 2016.)

# Pregled predavanja

# Uniformno stujanje u $x$-smjeru

Ako se promatra tekućina koja ispunjava cjelokupni prostor te se kontantnom brzinom giba u $x$-smjeru, tada je:

$$v_x = U, \qquad v_y = 0, \qquad v_z = 0$$

pa je potencijal:

$$\phi = U\,x = \vec{U} \cdot \vec{r}.$$

U 2D slučaju, može se definirati funkciju strujnice, pa je:

$$\phi(x, y) = U\,x, \qquad \psi(x, y) = U\,y,$$

odnosno kompleksni potencijal:

$$u(z = x + \imath y) = \phi + \imath\psi = U\,z,$$

gdje je $z$ kompleksni broj $x + \imath y$.

# Uniformno stujanje u cilindričkim koordinatama

Uvodimo cilindrične koordinate:

$$x = \rho \, \cos\varphi, \qquad y = \rho \, \sin\varphi, \qquad z$$

U pretpostavku da je strujanje u $z$-smjeru, dobiva se:

$$\phi = U\, z.$$

Brzina tekućine je gradijent potencijala:

$$v_\rho = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \qquad v_\varphi = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \qquad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

# Uniformno stujanje u sfernim koordinatama

U sfernom koordinatnom sustavu:

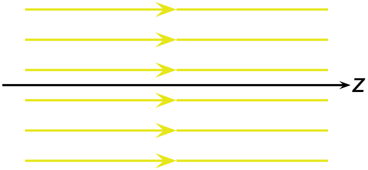
$$x = r\ \cos\varphi\ \sin\vartheta, \qquad y = r\ \sin\varphi\ \sin\vartheta, \qquad z = r\ \cos\vartheta$$

potencijal je:

$$\phi = U\, r \cos\vartheta$$

Iz potencijala se može izračunati brzina tekućine:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r\ \sin\vartheta}\,\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \qquad v_\vartheta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}$$



# Vrtlog

Vrtložno gibanje u cilindričnim koordinatama, neovisno o $z$-smjeru može se zapisati kao:

$$v_\rho = 0 \text{ (nema radijalnog kretanja)} \qquad v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}.$$

Vrijedi:

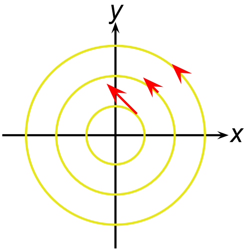
$$\oint_C \vec{dl} \cdot \vec{v} = \Gamma$$

gdje je $C$ bilo koja zatvorena kružna putanja oko $z$-osi. Stoga je:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = 0 \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi\rho}$$

odnosno, potencijal je:

$$\phi = \frac{\Gamma\,\varphi}{2\pi}.$$



# 2D komplekni potencijal za vrtlog

Ako nema $z$ ovisnosti, za opis 2D strujanja može se koristiti kompleksna notacija. Kut $\varphi$ može se izračunati iz kompleksnog broja kao imaginarni dio logaritma:

$$\ln(x + \imath y) = \ln(\rho\, e^{\imath\varphi}) = \ln\rho + \imath\,\varphi$$

Stoga je pripadni kompleksni potencijal za 2D vrtlog:

$$u(z) = -\frac{\imath\Gamma}{2\pi}\,\ln z$$

Imaginarni dio kompleksnog potencijala je funkcija strujnice:

$$\psi(x, y) = \Im(u(z)) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\,\ln\rho = -\frac{\Gamma}{4\pi}\,\ln(x^2 + y^2)$$

# Strujanje s izvorom u ishodištu

U analogiji s poznatim rezultatom iz elektrostatike, brzina tekućine koja ima izvor u ishodištu je:

$$v_r = \frac{Q}{4\pi}\,\frac{1}{r^2}, \qquad v_\varphi = 0, \qquad v_\vartheta = 0.$$

Pri tome je površinski integral po bilo kojoj površini koja sadrži ishodište:

$$\int_{\mathcal{S}} d\vec{S}\cdot\vec{v} = Q.$$

isti i jednak $Q$.

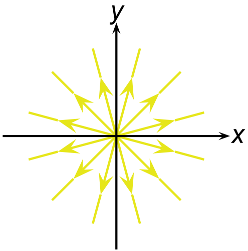
Polazeći iz definicije potencijala u sfernim koordinatama dobiva se:

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r}$$

# Strujanje s izvorom u ishodištu - 2D slučaj

Ako je u ishodištu izvor tekućine, onda postoji samo radijalna komponenta brzine koja je:

$$v_\rho = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}.$$




Polazeći od definicije potencijala dobiva se:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\ln \rho$$

To odgovara kompleksnom potencijalu (u prikazu pomoću kompleksnih brojeva):

$$u(z = x + \imath y) = \frac{Q}{2\pi}\,\ln z.$$

Funkcija strujnice je imaginarni dio kompleksnog potencijala:

$$\psi = \Im(u) = \frac{Q}{2\pi}\,\varphi$$

# Dipolno strujanje u 2D

Dipolno se strujanje dobiva kao superpozicija strujanja s izvorom i strujanja s ponorom koji se nalaze vrlo blizu jedan drugom:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{Q}{2\pi}\left(\ln|\vec{\rho}-\vec{\rho}_1| - \ln|\vec{\rho}-\vec{\rho}_2|\right) \\
&\approx -\frac{Q}{2\pi}\left(\vec{\rho}_2-\vec{\rho}_1\right)\vec{\nabla}\ln|\vec{\rho}| = -\frac{1}{2\pi}\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\ln|\vec{\rho}| = -\frac{1}{2\pi}\frac{\vec{p}\cdot\vec{\rho}}{\rho^2} \\
&= -\frac{p}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{\rho}
\end{aligned}$$

gdje je

$$\vec{p} = Q\left(\vec{\rho}_2-\vec{\rho}_1\right)$$

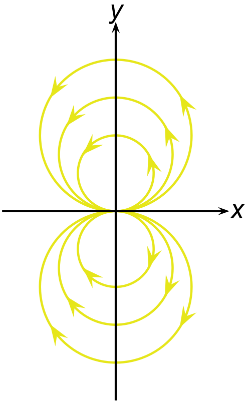
jačina dipolnog strujanja (dipolni moment). Prikaže li se potencijal u kompleksnom zapisu:

$$u = -\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z}$$

# Dipolno strujanje u 2D

Imaginarni dio kompleksnog potencijala je funkcija strujnice:

$$\psi = \frac{p}{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\rho}$$



# Opticanje cilindra

Strujanje tekućine kod opticanja cilindra može se prikazati kao superpozicija uniformnog i dipolnog strujanja:

$$\psi = \psi_{\text{uniformno}} + \psi_{\text{dipolno}} = U\,\rho\,\cos\varphi - \frac{p}{2\pi}\,\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Jačinu dipolnog toka, $p$, treba tako odabrati da se zadovolji rubni uvjet na površini cilindra,

$$\vec{v}\cdot\left.\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right|_{\rho=R} = 0.$$

Brzine u cilindričnim koordinatama:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \left(U + \frac{p}{2\pi\,\rho^2}\right)\cos\varphi \\ v_\varphi &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -\left(U - \frac{p}{2\pi\,\rho^2}\right)\sin\varphi \end{aligned}$$

Rubni uvjet je zadovoljen ako je:

$$p = -2\pi\,U\,R^2. \qquad (R \text{ je radijus cilindra})$$

# Opticanje cilindra u 2D

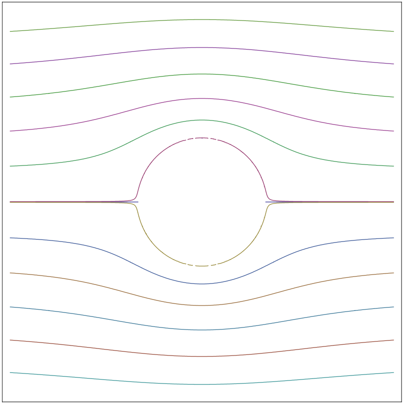
Pripadni kompleksni potencijal je:

$$u = U\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$$

Imaginarni dio je funkcija strujnice:

$$\psi = U\left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)\sin\varphi$$

Različite vrijednosti funkcije $\psi$ prikazane su na slici desno.



# Opticanje cilindra uz vrtloženje

Ovaj izraz za potencijal kod opticanja **nije** jedino moguće rješenje. U stvari postoji beskonačno mnogo riješenja. Npr. poznatom rješenju može se pribrojiti potencijal vrtloga koji se nalazi u centru cilindra. Tada je:

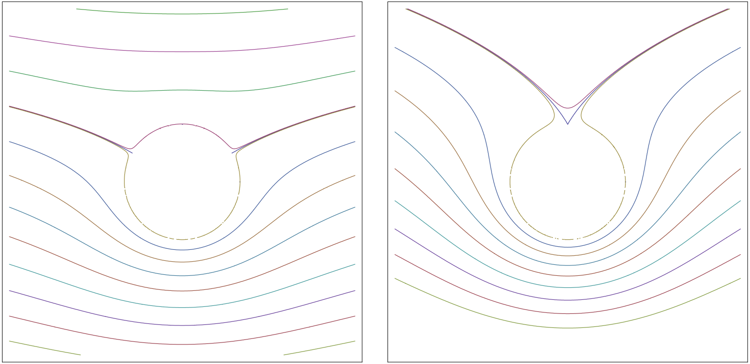
$$\phi = U\left(\rho + \frac{R^2}{\rho}\right)\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$$

Ovo je moguće jer vrtlog modificira samo tangencijalnu (kutnu) komponentu brzine, a ne mijenja radijalnu komponentu brzine. Rubni uvjet na površini cilindra i dalje je ispunjen.

$$\begin{aligned} v_\rho &= U\left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi \\ v_\varphi &= -U\left(1 + \frac{R^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi\,\rho} \end{aligned}$$

# Opticanje cilindra uz vrtloženje

Stujanje više nema osnu simetriju.



Zavisno od jačine vrloga, na površini cilindra mogu biti dvije asimetrične točke stagnacije ili samo jedna ili čak niti jedna. Točka stagnacije (mrtvila, zastoja) je ona u kojoj je brzina tekućine po iznosu jednaka nuli.

# Magnusova sila

Silu kojom tekućina djeluje na cilindar (po jedinici dužine) moguće je izračunati iz raspodjele tlaka na površini cilindra. A raspodjela tlaka na površini cilindra može se odrediti iz Bernoullijeve jednadžbe budući da se promatra potencijalno stacionarno gibanje. Tada je:

$$p(R,\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\,[v_\varphi(R,\varphi)]^2 = p_0 + \frac{\rho_0}{2}U^2$$

gdje je $p_0$ tlak u *beskonačnosti* gdje je brzina tekućine $U$. Također, $\rho_0$ predstavlja gustoću tekućine i ne treba je mješati s radijus-koordinatom u cilindričnom koordinatnom sustavu. Odavde izlazi da je:

$$p(R,\varphi) = p_0 + \frac{\rho_0}{2}\,U^2\,\left(1 - \left(-2\,\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi\,R\,U}\right)^2\right)$$

# Magnusova sila

Sila vučenja, $F_D$ je komponenta sile u smjeru gibanja tekućine, a sila uzgona, $F_L$, dio sile okomit na brzinu opticanja. Dakle:

$$
\begin{aligned}
f_D &= -R \int_0^{2\pi} d\varphi\, p(\varphi)\, \cos\varphi \\
f_L &= -R \int_0^{2\pi} d\varphi\, p(\varphi)\, \sin\varphi,
\end{aligned}
$$

$f_D$ i $f_L$ su sile po jedinici dužine cilindra. Proračun daje:

$$
\begin{aligned}
f_D &\equiv 0 \\
f_L &= \rho_0\, U\, \Gamma.
\end{aligned}
$$

Sila uzgona je različita od nule **samo** ako postoji vrtložna komponenta u gibanju tekućine. Ova sila zove se **Magnusova sila**. S druge strane, sila vučenja općenito uvijek je jednaka nuli budući da je viskoznost tekućine zanemarena.

# Magnusova sila

Izraz za Magnusovu silu jednako može se primjeniti i kod prepreke koja nije cilindar, pretpostavljajući da je jačina vrloga, $\gamma$ dana s cirkularnim integralom brzine oko tijela. Ovaj vrtložni dio gibanja, s jedne strane tijela će povećavati brzinu opticanja (smer $U$ i smjer vrtložnog gibanja je isti), a s druge strane tijela će poništavati brzinu (smer $U$ i smjer vrtložnog gibanja je suprotan). Zbog Bernoullijeve jednadžbe, na onoj strani gdje je povećana brzina tlak je umanjen, a na suprotnoj tlak će biti veći. Kao rezultat pojavljuje se sila uzgona.

Magnusova sila je razlog zašto avioni mogu letjeti, jedrilice plove ili zašto *felšana* lopta u nogometu zaokreće.

Treba kazati da nije moguće imati vrtložnu komponentu brzine u idealnoj potencijalnoj tekućini ako je tijelo konačnih dimenzija (u svim smjerovima). Da bi se dobila konačna sila uzgona bilo je potrebno imati cilindar koji se proteže u beskonačnost u jednoj od koordinata.